Sekundarstufe II Inhaltsübersicht

Anhang

Übungsklausuren

1. Bestimme aus den Punkten $A(1;2)$ und $B(9;6)$ eine lineare Funktion vom Typ $f(x) = ax + b$
   Bestimme zu dieser Funktion die Orthogonale, die durch den Punkt $A(1;2)$ läuft.

2. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} 7a + 3b = 100 \\ 3a - b = 20 \end{vmatrix}$$

3. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} a + b + c = 18 \\ 4a + 2b + c = 13 \\ 9a + 3b + c = 10 \end{vmatrix}$$

4. Vereinfache folgende Terme

   1. $(x-3)^2 + x^2 - 3(x+1)$

   2. $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} - \frac{2}{x^2-y^2}$

5. Löse die folgenden Gleichungen so weit wie möglich auf

   1. $x + 3 = \sqrt{6x + 25}$

   2. $\frac{8}{x-3} - \frac{7}{x} = 1$

3. $3 \cdot 5^{2x} = 7^{(x+4)}$

6. Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungen

1. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{81}{3} = 0$

2. $5x^3 + 10x^2 = 0$

3. $(x+2) \cdot (x-3) \cdot x = 0$

4. $3x^2 + 6x - 24 = 0$

5. $2x^4 + 4x^2 - 16 = 0$

6. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

7. $-e^{4x} + 5 = 0$

8. $5e^{2x} - 2e^x = 0$

9. $e^{4x} - 4e^{2x} + 3 = 0$

Ableitungen

1. Leite die folgenden Funktionsgleichungen nach dem Differenzialquotienten und nach dem Differenzenquotienten an der Stelle „x“ ab …

   1. $f(x) = x^2$; $an\ der\ Stelle\ x = 1$
   2. $f(x) = x^2 + 2x$; $an\ der\ Stelle\ x = 2$
   3. $f(x) = x^2 + 2x + 2$; $an\ der\ Stelle\ x = 3$
   4. $f(x) = x^4$; $an\ der\ Stelle\ x = 4$

2. Ableitung nach der Potenzregel

   1. $f(x) = x^8$
   2. $f(x) = x^a$
   3. $f(x) = x^{4s-1}$
   4. $f(x) = x^{-1}$
   5. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$
   6. $f(x) = x^{1,5}$

3. Ableitung nach der Faktorregel

   1. $f(x) = 3x^3$
   2. $f(x) = 2\sqrt{x}$
   3. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$
   4. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{5}$
   5. $f(x) = \frac{2}{x^2}$

6. $f(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. Ableitung nach der Summen-bzw. Differenzenregel

   1. $f(x) = x^3 + x^2 - x - 7$
   2. $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^2 - 2$
   3. $f(x) = -x^3 + \frac{1}{8}x^2 - 3x + 8$
   4. $f(x) = 4x^4 + \frac{\sqrt{2x}}{4} - 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{4x}} + 6$
   5. $f(x) = 2{,}6x^6 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2x} + 35$
   6. $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 2} + \frac{\sqrt{4x}}{4} - \frac{5}{\sqrt{0{,}5x^3 - 4}}$

5. Ableitung nach der Produktregel

   1. $f(x) = 2x \cdot 3x^2$
   2. $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} \cdot (x^2 - 1)$
   3. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (3x - 7)$
   4. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 5) \cdot (4 - x)$
   5. $f(x) = (2x - 6) \cdot (-3x + x^2) \cdot \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)$

6. Ableitung nach der Kettenregel

   1. $f(x) = (5x + 3)^3$
   2. $f(x) = (3x^3 - 4x^4)^2$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2+1} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^2$
4. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2x+1}}$
5. $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} - x^3\right)^4$

7. Ableitung nach der Quotientenregel

1. $f(x) = \frac{-3}{x^2}$
2. $f(x) = \frac{3}{4x^5}$
3. $f(x) = \frac{8x^4}{2x^2}$
4. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$
5. $f(x) = \frac{5x-2}{3x^2}$
6. $f(x) = \frac{8x^2+4x}{x}$
7. $f(x) = \frac{x}{x^2-4x+4}$

8. Ableitung von Wurzelfunktionen

1. $f(x) = 3\sqrt{x}$
2. $f(x) = \sqrt{x+3}$
3. $f(x) = \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x+3}}}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}x + 1\right)}$
5. $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{x+2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - 3\right)$
6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{\sqrt[3]{x-1}}{2}$

Ableitungen

1. $f(x) = x^{(1+a)(1-a)}$

2. $f(x) = \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}$

3. $f(x) = x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x}}$

4. $f(x) = \frac{-10a^2}{21\sqrt[7]{x}}$

5. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2(a^2-b^2)}}{\sqrt[3]{x^5(a+b)}}$

6. $f(x) = \frac{7}{6} \cdot \sqrt[6]{\frac{x}{m^2}} + \sqrt{m}$

7. $f(x) = (3 + x)(2 + 2x)(1 - x)$

8. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x-3}$

9. $f(x) = \sqrt{\frac{9x^2+2x}{9x^2-2x}}$

10. $f(x) = \frac{(\sqrt{x^2}+4)\cdot(x^3+4)^2}{\sqrt{8}-x^3}$

9. Ableitung von e-Funktionen

1. $f(x) = e^{2x}$

2. $f(x) = 3{,}5e^{x^2}$

3. $f(x) = 2e^x(x^2 - 6x + 9)$

4. $f(x) = e^{-\frac{x+1}{d}}$

5. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x+3}$

Ableitungen

6. $f(x) = e^{3x^2+x}$

7. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x+1}{e^x-1}}$

8. $f(x) = e^{2x} \cdot e^{x^2} \cdot \sqrt{e^x}$

9. $f(x) = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2$

10. $f(x) = \frac{e^{3x}}{(1-x^2)^2}$

11. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

12. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^{5-x}$

13. $f(x) = \frac{x^3+x^2}{e^{2x}}$

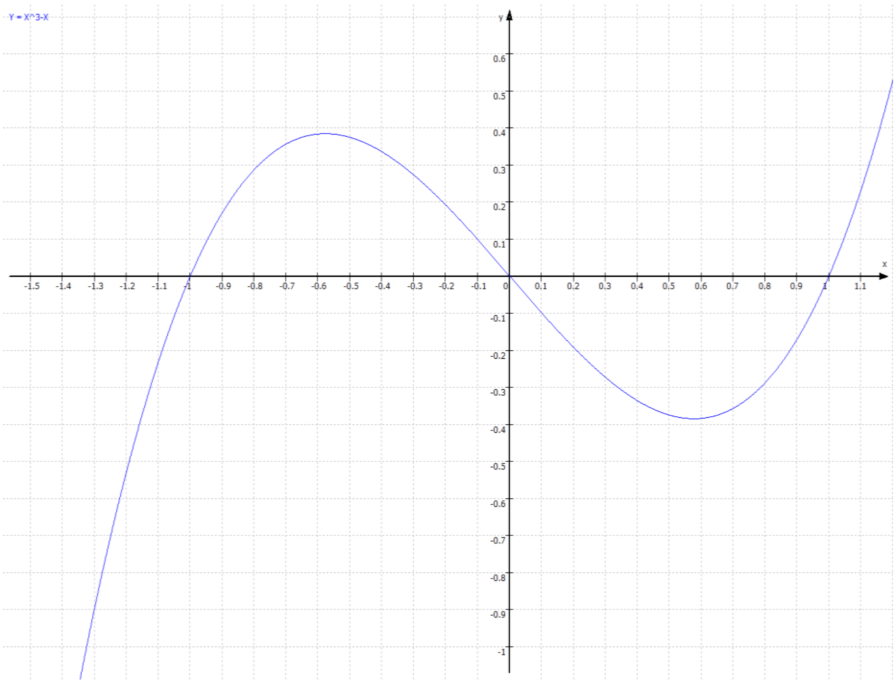
14. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{e^{3x}}{e^{x^3}}}$

15. $f(x) = e^{0,5x+3}(x^3 + x^2 - 2x)$

Funktionsdiskussion

$$f(x) = x^3 - x$$

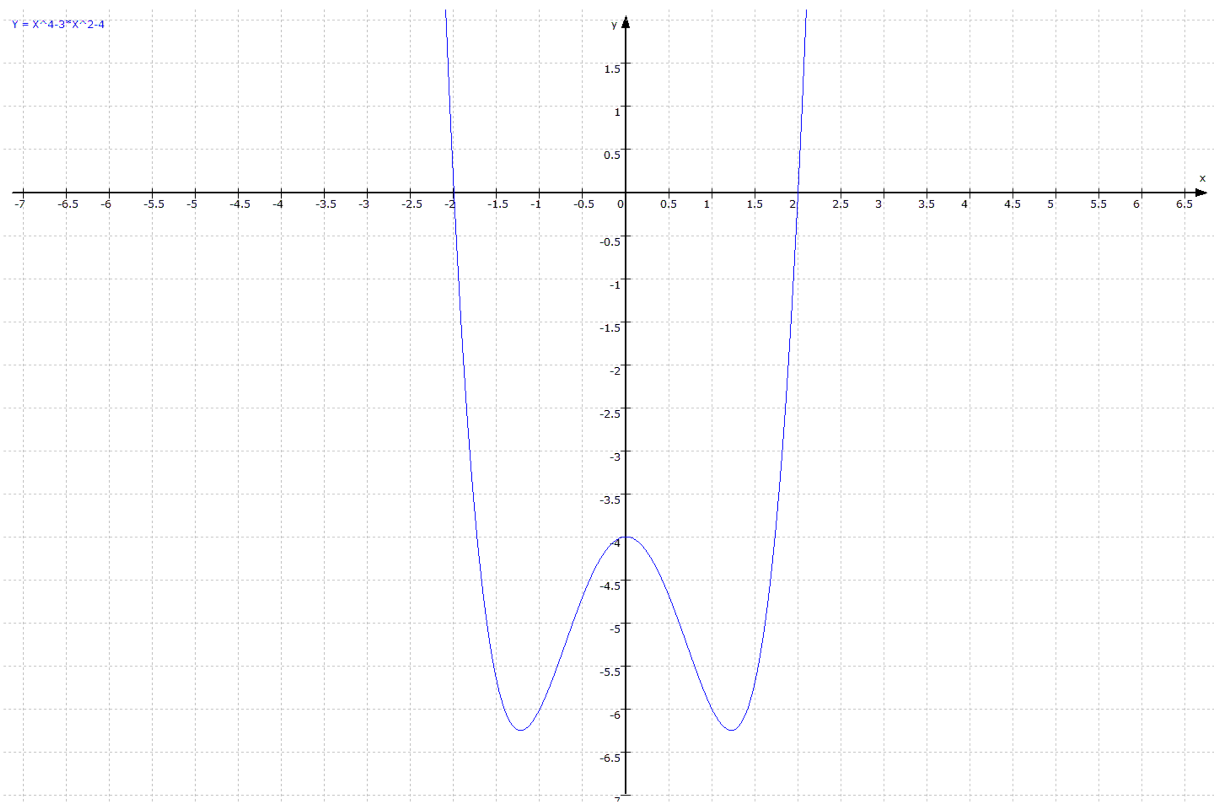
1. Definitionsbereich
2. Wertebereich
3. Symmetrieeigenschaft
4. Randverhalten
5. Ableitungen
6. Nullstellen
7. Achsenabschnitt
8. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
9. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
10. Monotonieverhalten
11. Krümmungsverhalten
12. Funktion der Wendetangente
13. Funktion der Wendenormalen
14. Skizze



Funktionsdiskussion

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$$

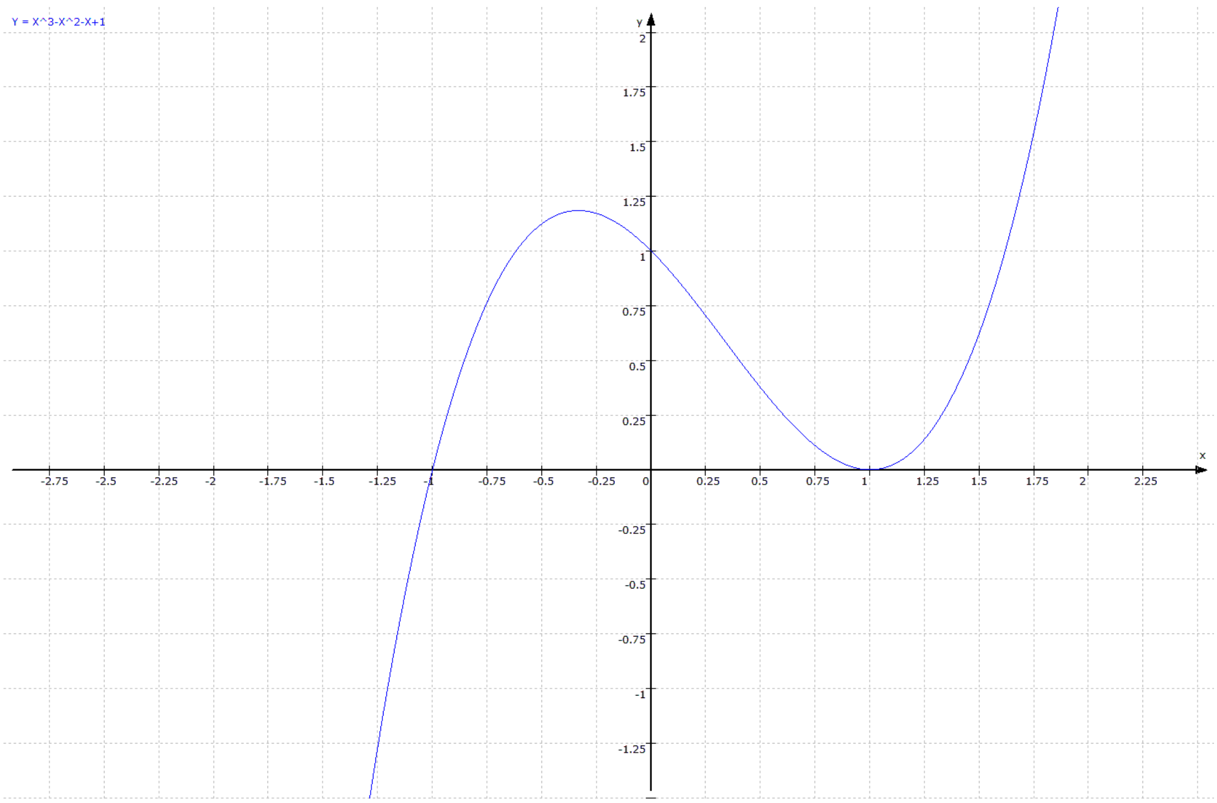
1. Definitionsbereich
2. Wertebereich
3. Symmetrieeigenschaft
4. Randverhalten
5. Ableitungen
6. Nullstellen
7. Achsenabschnitt
8. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
9. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
10. Monotonieverhalten
11. Krümmungsverhalten
12. Funktion der Wendetangente
13. Funktion der Wendenormalen
14. Skizze



Funktionsdiskussion

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

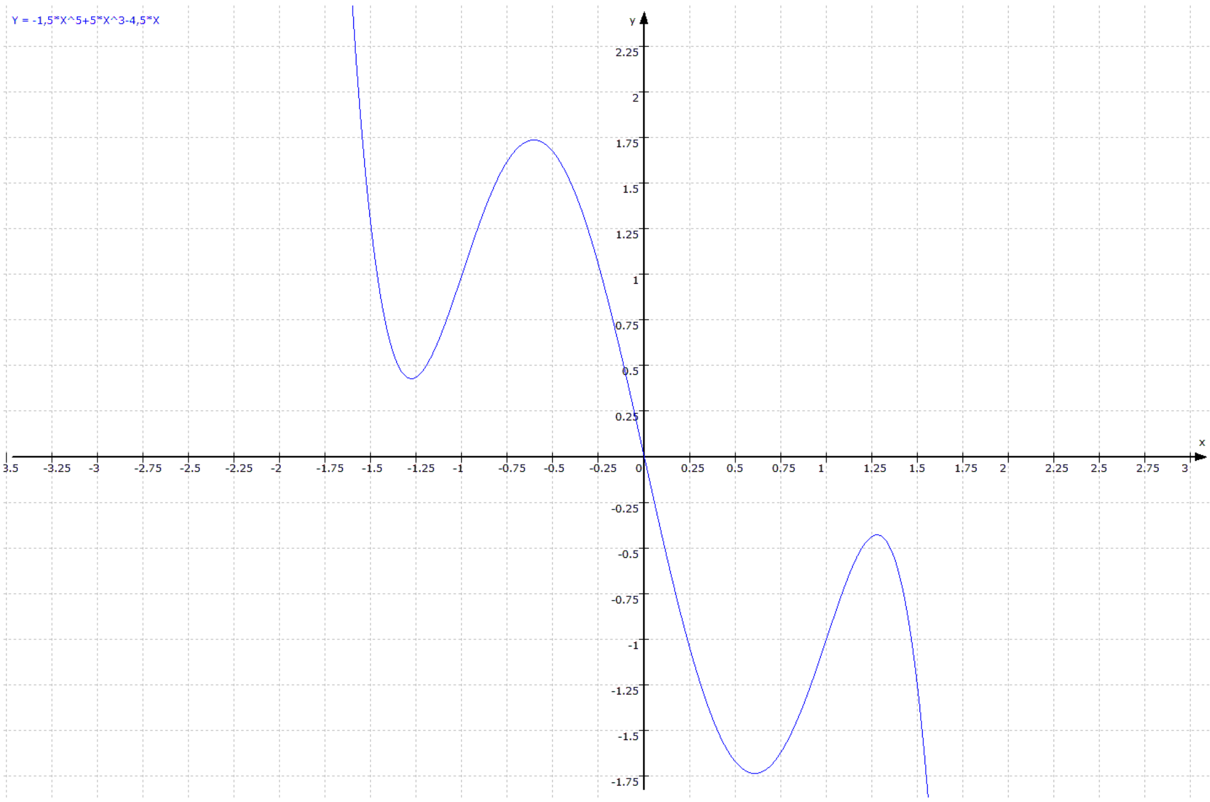
1. Definitionsbereich
2. Wertebereich
3. Symmetrieeigenschaft
4. Randverhalten
5. Ableitungen
6. Nullstellen
7. Achsenabschnitt
8. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
9. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
10. Monotonieverhalten
11. Krümmungsverhalten
12. Funktion der Wendetangente
13. Funktion der Wendenormalen
14. Skizze



Funktionsdiskussion

$$f(x) = -1{,}5x^5 + 5x^3 - 4{,}5x$$

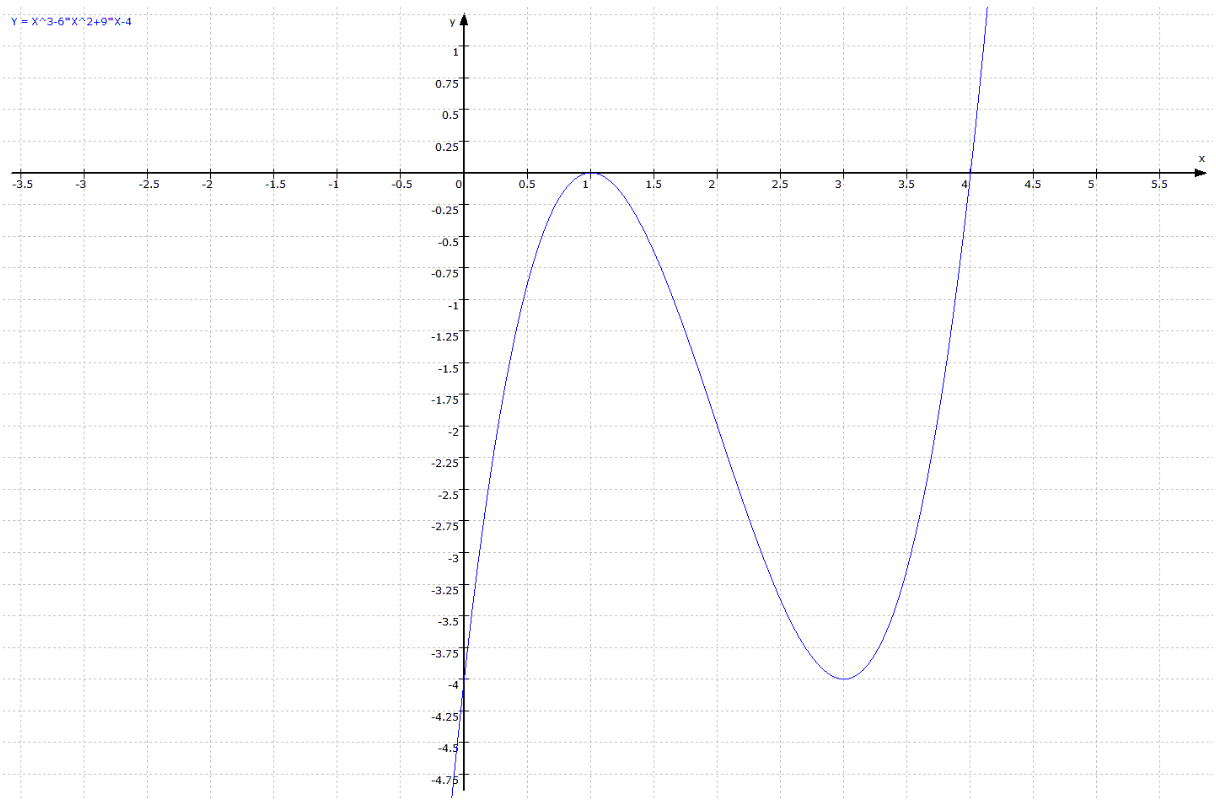
1. Definitionsbereich
2. Wertebereich
3. Symmetrieeigenschaft
4. Randverhalten
5. Ableitungen
6. Nullstellen
7. Achsenabschnitt
8. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
9. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
10. Monotonieverhalten
11. Krümmungsverhalten
12. Funktion der Wendetangente
13. Funktion der Wendenormalen
14. Skizze



Funktionsdiskussion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

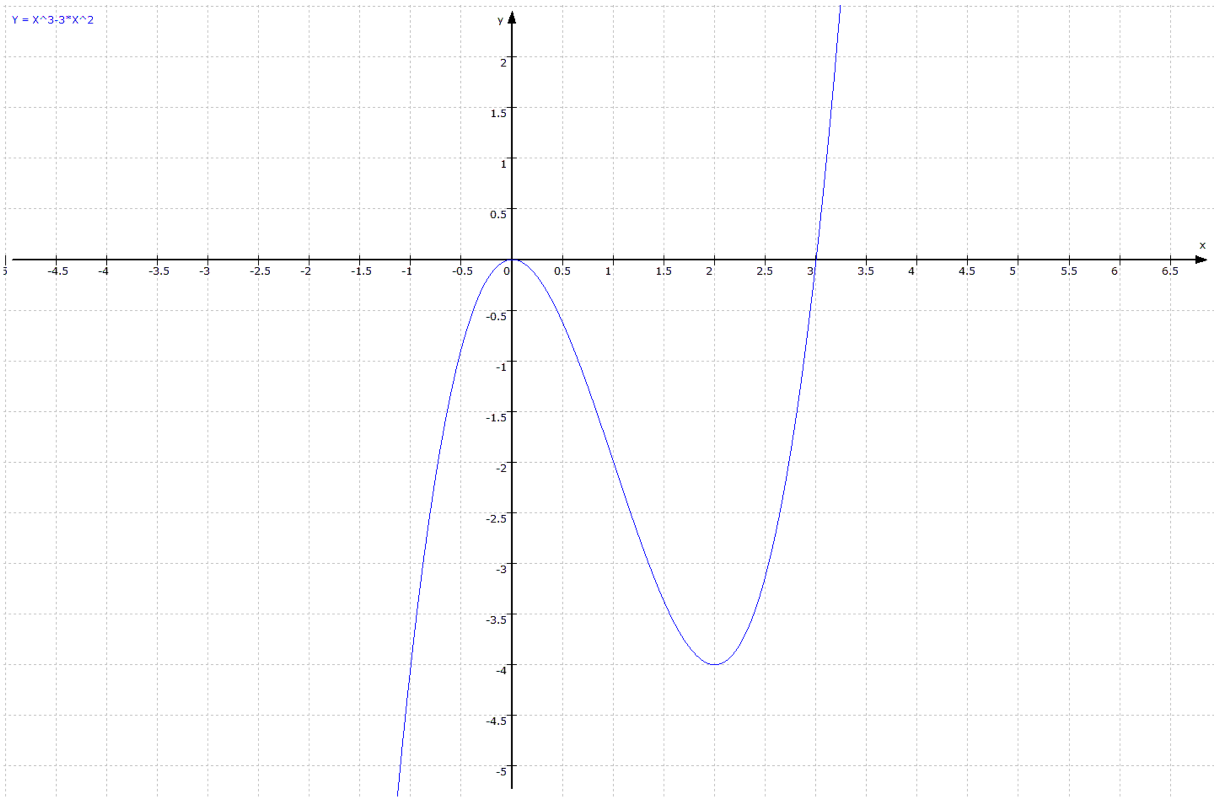
1. Definitionsbereich
2. Wertebereich
3. Symmetrieeigenschaft
4. Randverhalten
5. Ableitungen
6. Nullstellen
7. Achsenabschnitt
8. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
9. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
10. Monotonieverhalten
11. Krümmungsverhalten
12. Funktion der Wendetangente
13. Funktion der Wendenormalen
14. Skizze



Funktionsdiskussion

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

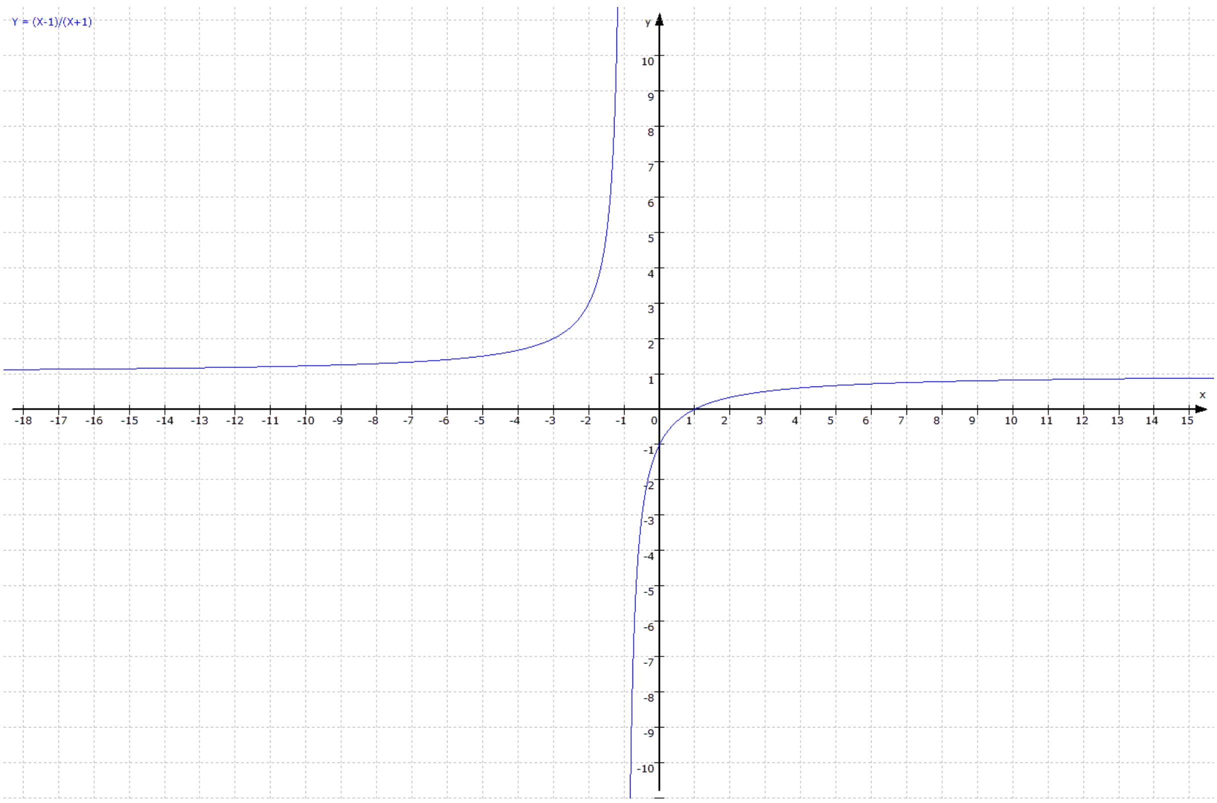
1. Definitionsbereich
2. Wertebereich
3. Symmetrieeigenschaft
4. Randverhalten
5. Ableitungen
6. Nullstellen
7. Achsenabschnitt
8. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
9. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
10. Monotonieverhalten
11. Krümmungsverhalten
12. Funktion der Wendetangente
13. Funktion der Wendenormalen
14. Skizze



Funktionsdiskussion

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

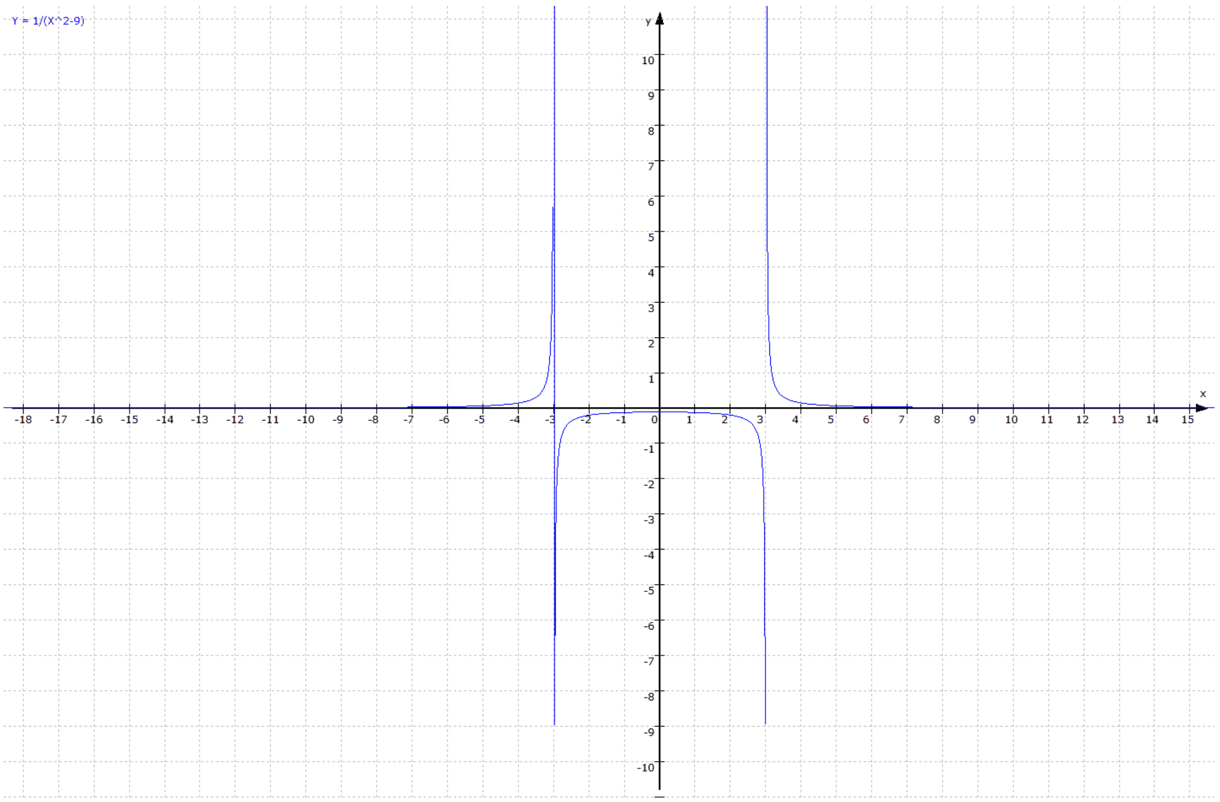
1. Definitionslücken
2. Symmetrieeigenschaft
3. Ableitungen
4. Nullstellen
5. Achsenabschnitt
6. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
7. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
8. Asymptoten



Funktionsdiskussion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$$

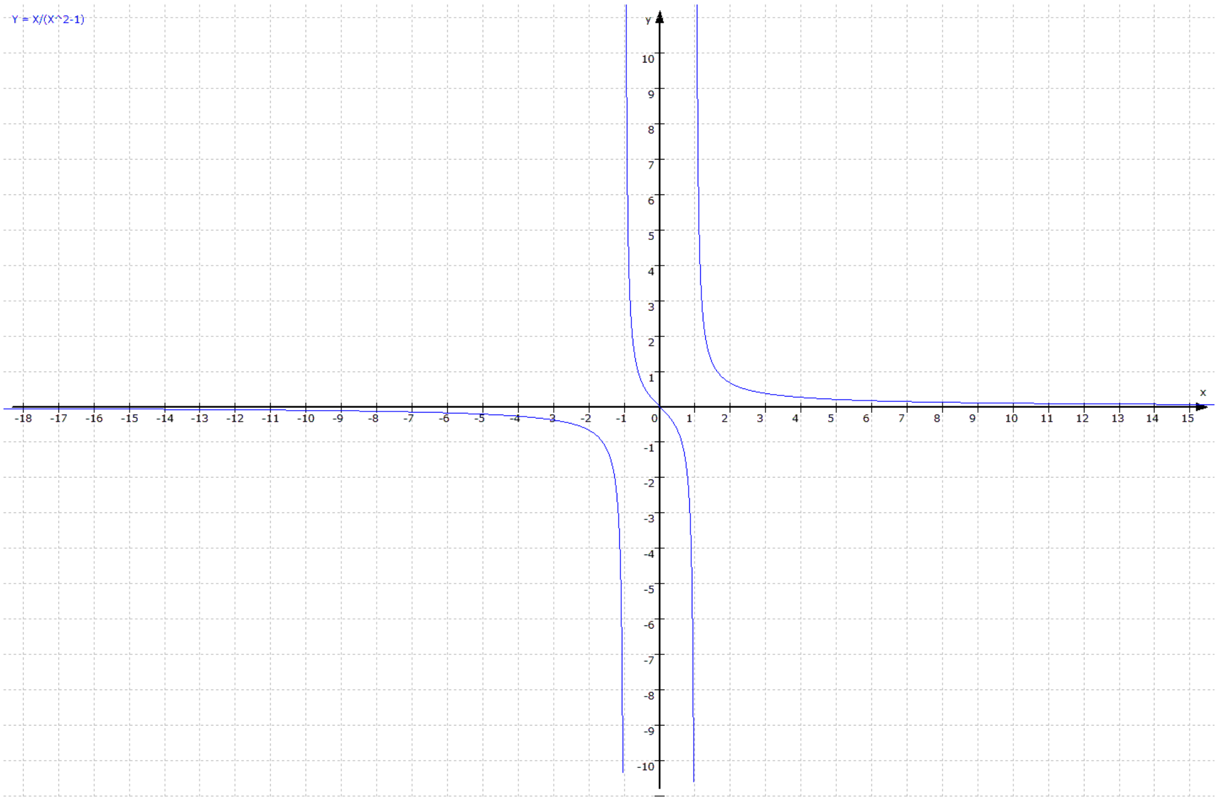
1. Definitionslücken
2. Symmetrieeigenschaft
3. Ableitungen
4. Nullstellen
5. Achsenabschnitt
6. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
7. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
8. Asymptoten



Funktionsdiskussion

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

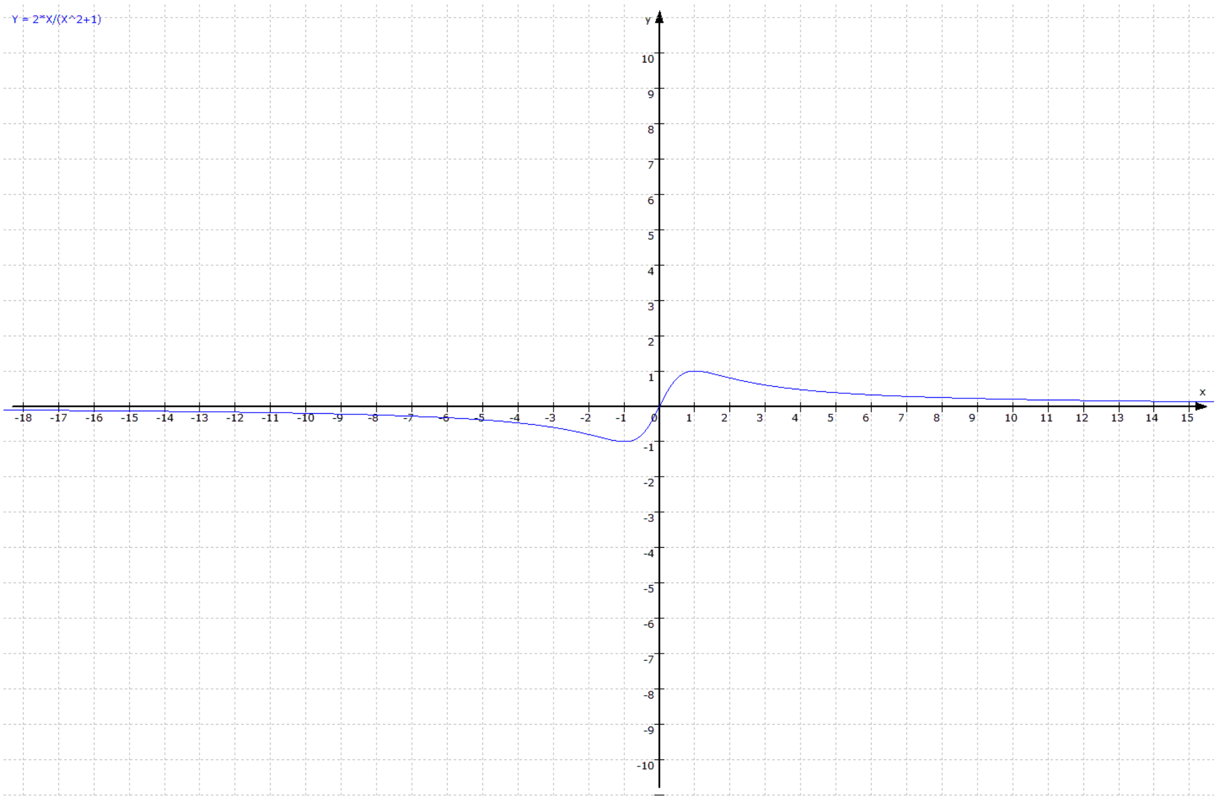
1. Definitionslücken
2. Symmetrieeigenschaft
3. Ableitungen
4. Nullstellen
5. Achsenabschnitt
6. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
7. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
8. Asymptoten



Funktionsdiskussion

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

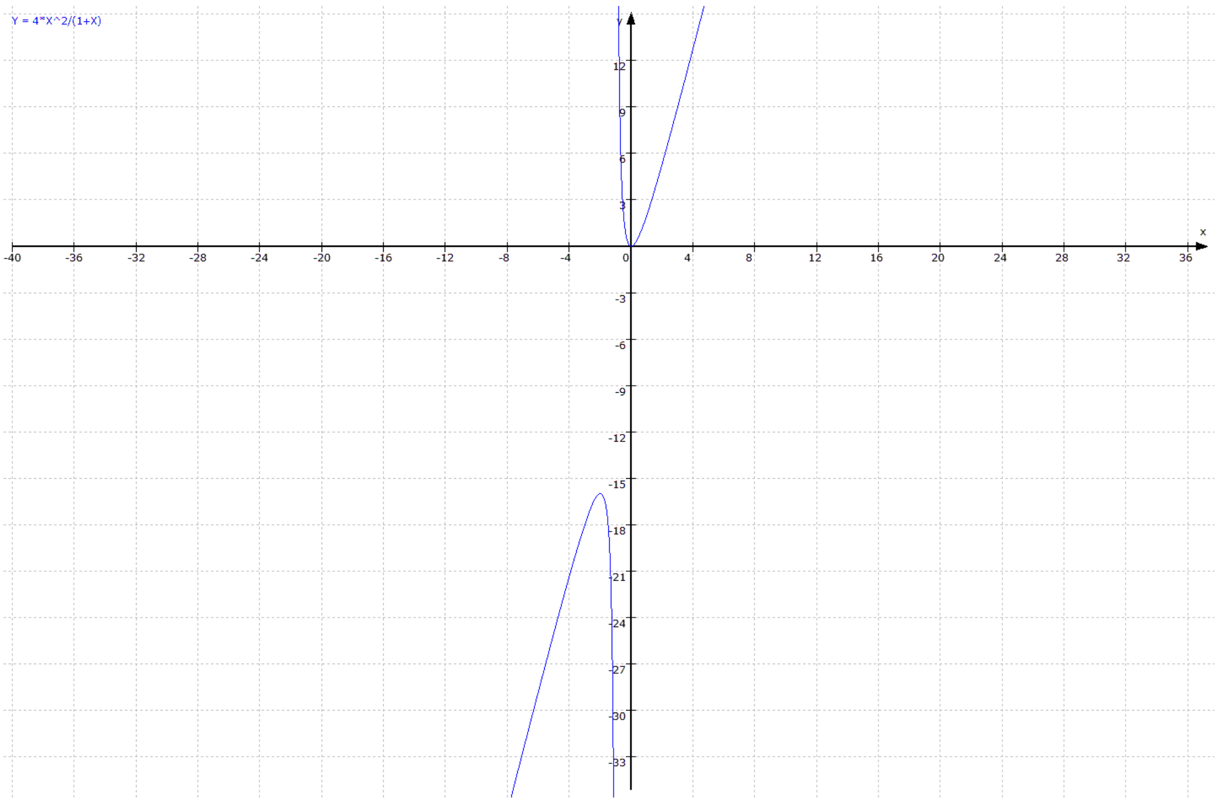
1. Definitionslücken
2. Symmetrieeigenschaft
3. Ableitungen
4. Nullstellen
5. Achsenabschnitt
6. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
7. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
8. Asymptoten



Funktionsdiskussion

$$f(x) = \frac{4x^2}{1 + x}$$

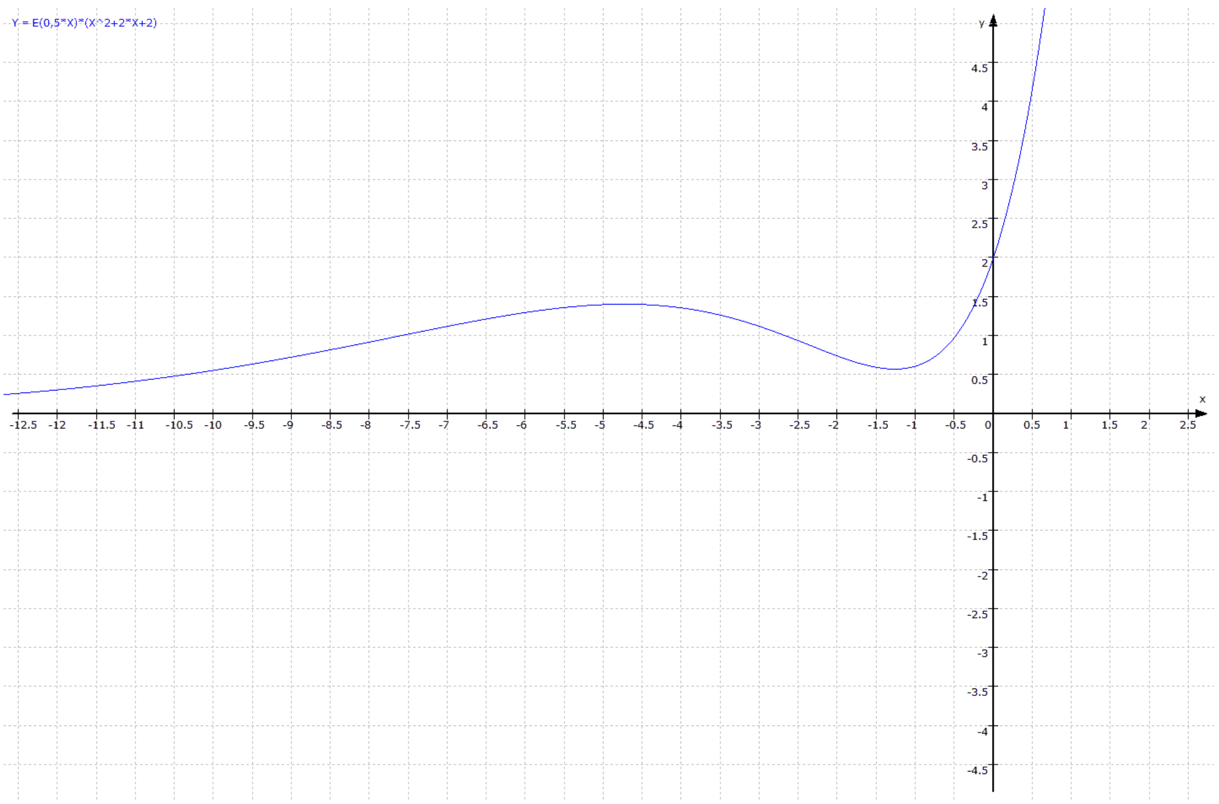
1. Definitionslücken
2. Symmetrieeigenschaft
3. Ableitungen
4. Nullstellen
5. Achsenabschnitt
6. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
7. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
8. Asymptoten



Funktionsdiskussion

$$f(x) = e^{0,5x}(x^2 + 2x + 2)$$

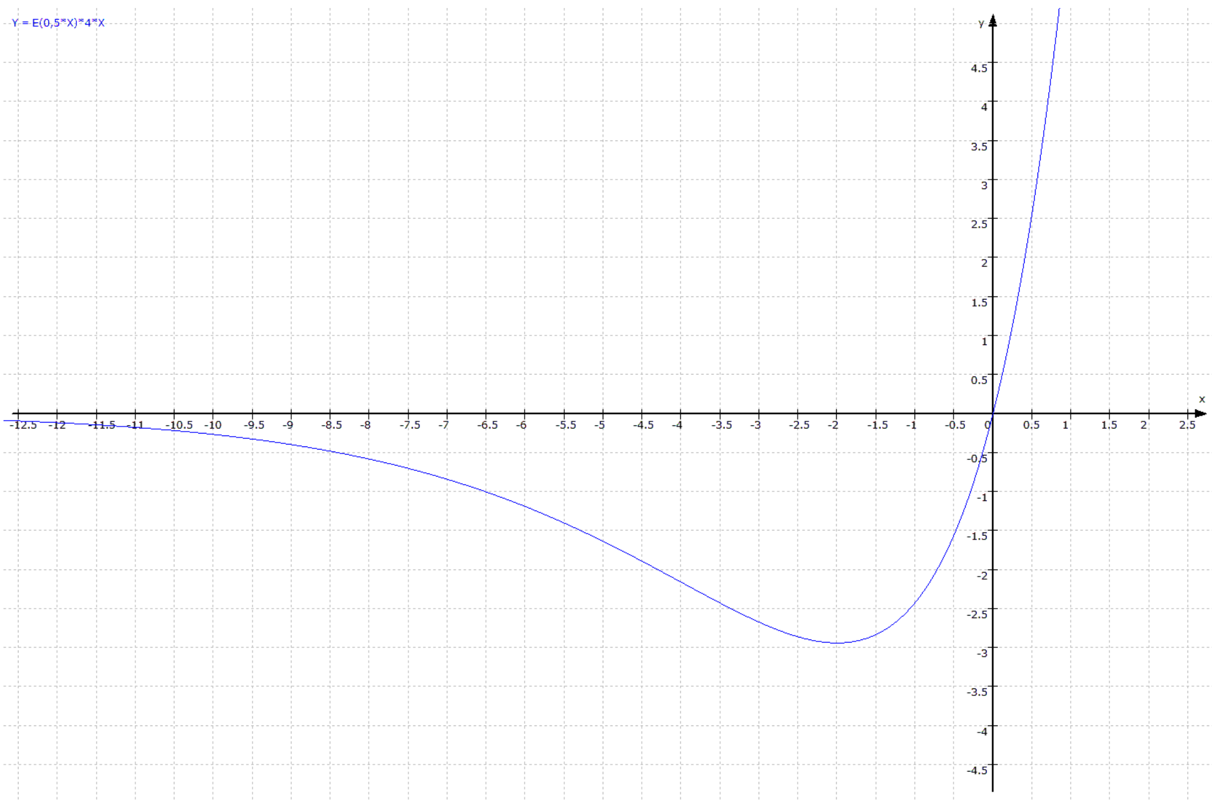
1. Definitionsbereich
2. Wertebereich
3. Symmetrieeigenschaft
4. Randverhalten
5. Ableitungen
6. Nullstellen
7. Achsenabschnitt
8. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
9. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
10. Monotonieverhalten
11. Krümmungsverhalten
12. Funktion der Wendetangente
13. Funktion der Wendenormalen
14. Skizze



Funktionsdiskussion

$$f(x) = 4x \cdot e^{0,5x}$$

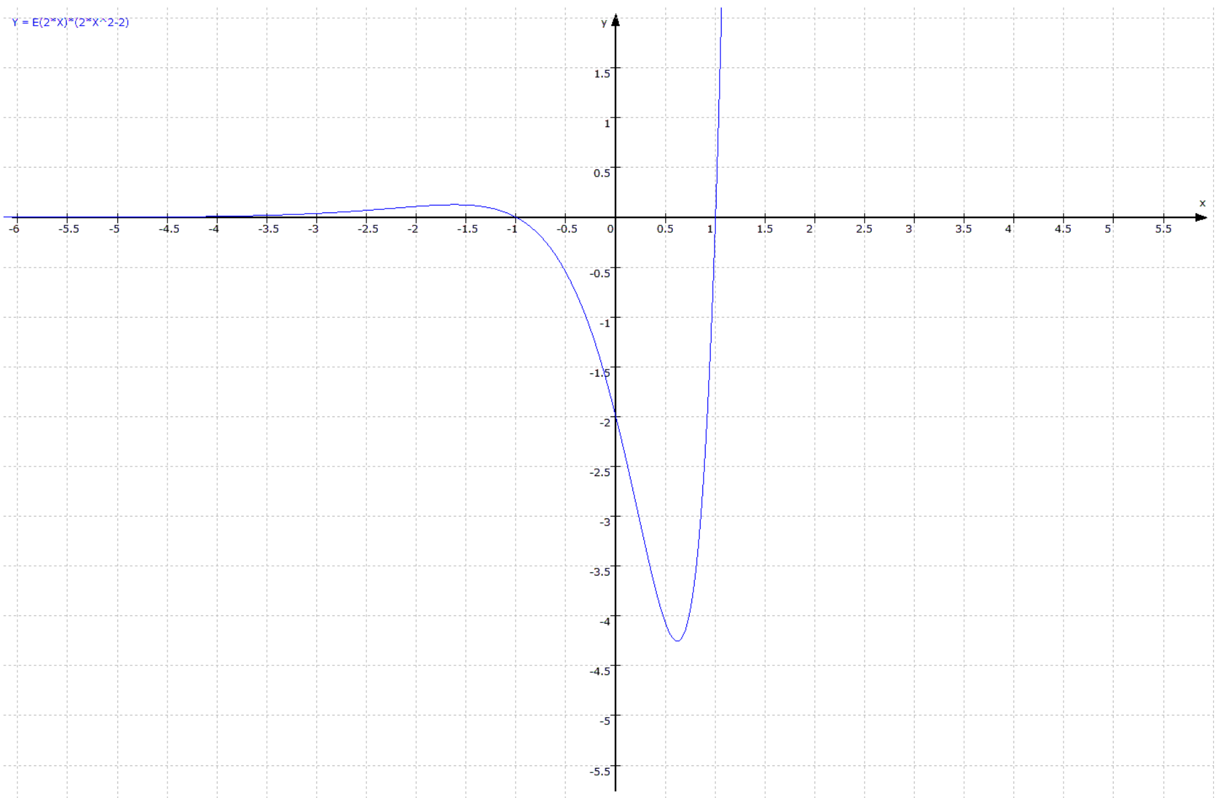
1. Definitionsbereich
2. Wertebereich
3. Symmetrieeigenschaft
4. Randverhalten
5. Ableitungen
6. Nullstellen
7. Achsenabschnitt
8. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
9. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
10. Monotonieverhalten
11. Krümmungsverhalten
12. Funktion der Wendetangente
13. Funktion der Wendenormalen
14. Skizze



Funktionsdiskussion

$$f(x) = e^{2x}(2x^2 - 2)$$

1. Definitionsbereich
2. Wertebereich
3. Symmetrieeigenschaft
4. Randverhalten
5. Ableitungen
6. Nullstellen
7. Achsenabschnitt
8. Extrema, notwendige und hinreichende Kriterien
9. Wendepunkte, notwendige und hinreichende Kriterien
10. Monotonieverhalten
11. Krümmungsverhalten
12. Funktion der Wendetangente
13. Funktion der Wendenormalen
14. Skizze



Funktionenscharen

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^4 - kx^2$

   1. Bestimme die Nullstellen,
   2. Extremalpunkte,
   3. und Wendepunkte der Funktionenschar
   4. Zeige, dass die Wendepunkte aller Funktionen auf einer Parabel liegen.
   5. Bestimme den Graphen für die Ortslinie der Extrema.

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = 2x^3 - 3kx$

   1. Bestimme die Nullstellen,
   2. Extremalpunkte,
   3. und Wendepunkte der Funktionenschar.
   4. Bestimme den Graphen für die Ortslinie der Extrema

3. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^5 + kx^3$

   1. Untersuche die Lage von Nullstellen,
   2. Extremalpunkten,
   3. und Wendepunkten der Funktionenschar.
   4. Bestimme den Graphen der Ortslinien für Extrema und Wendepunkte

4. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^3 - 3x^2 + kx$

   1. Untersuche die Lage von Nullstellen,
   2. Extremalpunkten,
   3. und Wendepunkten der Funktionenschar.
   4. Bestimme den Graphen der Ortslinien für Extrema und Wendepunkte.

Bestimmung ganzrationaler Funktionen durch vorgegebene Eigenschaften (Steckbriefaufgaben)

Bestimme die ganzrationale Funktion 2. Grades mit folgenden Eigenschaften …

1. Der Scheitelpunkt liegt bei S (1/2) und die Funktion geht durch den Punkt O (0/0)

2. Ein Punkt der Normalparabel lautet (-1/-1). An der Stelle x = 1 hat die Tangente die Steigung m = 4.

Bestimme die ganzrationale Funktion 3. Grades so, dass für den Graphen gilt …

3. P (0/0) ist ein Punkt des Graphen. W (2/4) ist der Wendepunkt und der dazugehörigen Wendenormalen mit der Steigung m = 0,25.

4. x = 0 und x = -3 sind Nullstellen der Funktion. E (3/-6) ist ein Extremalpunkt.

5. H (-1/2) ist ein Extremalpunkt und W (0/0,5) ist ein Wendepunkt.

Bestimme die ganzrationale Funktion 4. Grades so, dass für den Graphen gilt …

6. S(0/3) ist ein Sattelpunkt. Im Punkt (3/0) liegt eine horrizontale Tangente.

7. T (2/4) ist Extremalpunkt, W (0/0) ist ein Wendepunkt, an dem die Tangente die Steigung m = 1 hat.

8. P (0/0) und Q (x = 3) sind Extrema. W (1/11) ist ein Wendepunkt.

Bestimme die ganzrationale Funktion 4. Gardes, die achsensymmetrisch ist.

9. Der Graph geht durch den Punkt (0/0), x = 3 ist eine Nullstelle mit der Tangentensteigung m = 2.

10. E (2/4) ist Extremalpunkt, ein weiterer Punkt ist (0/-4).

11. Zwei Geraden sind durch die Halbgerade y = 0 für x ≤ 1 und y = 2 für x ≥ 3 gegeben.
Sie sollen durch einen Übergangsbogen so verbunden werden, dass die Übergangsfunktion knickfrei ist und einen möglichst kleinen Funktionsgrad aufweist.

12. Zwei Autobahnendstücke sollen knickfrei miteinander verbunden werden.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x; \quad x \leq 0$$
$$g(x) = 2x - 15; \quad x \geq 5$$

Wie heißt die Verbindungsfunktion als Polynom dritten Grades?

13. Beim Abwurfstoß einer Kugel aus 1,5m Höhe „fliegt" diese 20 m weit und „landet" unter einem Winkel von 27°. Es handelt sich um eine ballistische Flugbahn.

a) Nach wie viel Metern hat die Kugel den höchsten Punkt erreicht und wie hoch ist sie dann?
b) Unter welchem Abwurfwinkel begann ihr „Flug"?

14. Der ertragsgesetzliche Gesamtkostenverlauf basiert auf folgenden Kombinationen von Produktionsmengen (x) und Produktionskosten (y).

$ME(x);\ GE(y)$: $A\,(0; 14), B(1; 32), C(2; 40), D(3; 44), E(4; 50)$.

Der Erlös je Mengeneinheit beträgt 20 GE.

a) Bestimme die entsprechende Gesamtkostenfunktion.
b) Bestimme die Erlösfunktion.
c) Berechne die Gewinnschwelle und Gewinngrenze.
d) Berechne das Gewinnmaximum.

Extremwertaufgaben

1. Aus einem rechteckigen Stück Blech mit den Seitenlängen 16 x 10 cm sollen an den Ecken Quadrate herausgeschnitten werden, sodass beim hochbiegen der verbleibenden Seitenteile ein nach oben offener, quaderförmiger Kasten entsteht, dessen Rauminhalt maximal ist. Welche Seitenlänge müssen die Quadrate haben und wieviel Rauminhalt entsteht dadurch?

2. Aus deinem Draht der Länge 144 cm soll ein durch seine Kanten angedeuteter Quader mit quadratischer Grundfläche und maximalen Rauminhalt entstehen. Wie sind die Abmessungen zu wählen und wieviel Rauminhalt entsteht dadurch?

3. An einer Felswand soll ein 3000 m² großes rechteckiges Gelände eingezäumt werden. Welche Abmessungen muß der Zaun aufweisen, damit der Verbrauch minimiert wird?

4. Welche Abmessungen muß ein Rechteck haben, damit seine Fläche bei gegebenem Umfang maximal wird?

5. In einem Sportstadion soll eine 400 m Laufbahn (bestehend aus zwei Parallelen und zwei angesetzten Halbkreisen) so angelegt werden, dass das integrierte Fußballfeld (Rechteck) möglichst groß wird. Welche Abmessungen hat das so entstandene Fußballfeld und wie groß ist sein Flächeninhalt?

6. Der Querschnitt eines Kanals ist ein Rechteck mit angesetztem Halbkreis. Welche Abmessungen muß das Rechteck aufweisen, damit bei gegebenem Umfang des Querschnitts die Fläche maximal wird?

7. Ein Polynom 2.Grades hat die folgenden Punkte A(2/4), B(0/0) und C(4/0).Zu bestimmen ist die maximale Dreiecksfläche (rechtwinkliges Dreieck) zwischen dem Graphen und der x-Achse.

8. In einen geraden Kegel soll ein zylindrisches Loch gebohrt werden, dessen Volumen maximal werden soll. Der Radius des Kegels beträgt 10 cm, seine Körperhöhe 20 cm.

9. Welcher oben offene Zylinder hat bei gegebener Oberfläche das größte Volumen?

10. Welcher unten offene Kegel hat bei gegebener Mantelfläche das größte Volumen?

11. Ein Gefäß besteht aus einem Zylinder mit aufgesetzter Halbkugel. Welche Abmessungen muß es haben, damit es ohne Deckel bei gegebener Oberfläche ein möglichst großes Volumen hat?

12. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 12 cm und 8 cm lang. Diesem Dreieck ist ein möglichst großes Rechteck einzubeschreiben, dessen zwei Seiten auf den Katheten des Dreiecks liegen.

13. Bestimme den maximalen Flächeninhalt eines Rechtecks unterhalb der Funktion $f(x) = -2x + 10$, dessen Seiten auf den Koordinatenachsen liegen.

14. Bestimme den maximalen Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks unterhalb der Funktion $f(x) = -2x + 10$, dessen eine Kathete im Ursprung beginnt und auf der x-Achse liegt.

15. Bestimme den kürzesten Abstand vom Ursprung des Koordinatenkreuzes zur Funktion $f(x) = -2x + 10$.

16. Ein oben offener Zylinder mit dem Fassungsvermögen 1000cm³ soll eine minimierte Oberfläche erhalten.

17. Ein oben offener Zylinder mit der Oberfläche von 1000cm² soll maximales Volumen erhalten.

18. Bestimme den kürzesten Abstand vom Ursprung des Koordinatenkreuzes zur Funktion $f(x) = (x-5)^2$

19. Ein Fertigungsbetrieb produziert T-shirts. Bei einem Verkaufspreis von 25 € pro Stück können 5000 Stück verkauft werden. Wird der Verkausfspreis um 1 € gesenkt, werden 300 Stück mehr verkauft.

    Wie hoch muß der Verkaufspreis sein, damit eine maximale Menge an T-shirts verkauft wird?

20. Unterhalb des Funktionsgraphen $f(x) = -0{,}05x^3 + x + 4 \; mit \; (0 \leq x \leq 5)$ soll ein flächenmäßig maximales Fünfeck aus den folgenden Eckpunkten bestimmt werden,

    $A(0/0);\ B(5/0);\ C(5/f(5)),\ D(u/f(u))\ und\ E(0/f(0))$

21. Aus einem Draht der Länge 1 m soll ein Rechteck dermaßen gebogen werden, dass sein Flächeninhalt maximal wird. Wie sind die Umfangsmaße zu wählen?

22. Ein Rechteck soll die Fläche von 625 m^2 haben. Wie sind die Maße des Umfangs zu wählen, damit dieser minimal wird?

Integration

1. Bilde Stammfunktionen der folgenden Funktionen

   1. $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$
   2. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$
   3. $f(x) = \frac{x^4-2}{x^2}$
   4. $f(x) = 10 - \frac{2}{5}x^6$
   5. $f(x) = 10x \cdot (x^2+1)^4$
   6. $f(x) = (2x+1) \cdot 4 \cdot (x^2+x+2)^3$
   7. $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}$
   8. $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2-1}$
   9. $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3}$
   10. $f(x) = (2x-1) \cdot e^{-x}$
   11. $f(x) = (2x-4) \cdot e^{x^2-4x+1}$
   12. $f(x) = (x^2+2x+2) \cdot e^x$

2. Berechne die Fläche im vorgegebenen Integrationsintervall

   1. $\int_{-2}^{3}(x+1)\ dx$

   2. $\int_{0}^{4}(x^2+2x-3)\ dx$

   3. $\int_{1}^{2}\left(\frac{x^3-1}{x^2}\right)\ dx$

   4. $\int_{-2}^{2}\left(4-\frac{1}{4}x^3\right)\ dx$

3. Berechne den Flächeninhalt, die das Schaubild von f(x) mit der x-Achse über dem Intervall (a;b) begrenzt.

   1. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-4x^2$

   2. $f(x)=\ -\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{5}{3}$

   3. $f(x)=\ -(x+1)^2+4$

   4. $f(x)=\ x^3-3x^2-4x+12$

4. Berechne den Inhalt der Fläche, den die Schaubilder der Funktionen f(x) und g(x) begrenzen.

   1. $f(x)=x^3-x$; $g(x)=\ 3x$

   2. $f(x)=\ x^3-4x^2+4x-4$; $g(x)=x^2-4x$

5. Das Schaubild von f(x) rotiert auf dem angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne den Rauminhalt des entstehenden Drehkörpers.

   1. $f(x) = -\sqrt{x}$ [1 ; 4]
   2. $f(x) = \frac{x^2+6}{x^2}$ [1 ; 3]

6. Die Schaubilder von f(x) und g(x) begrenzen eine Fläche, die um die x-Achse rotiert. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers.

   1. $f(x) = \frac{1}{9}x^3$; $g(x) = -x^2 + 4x$
   2. $f(x) = -x + 5$; $g(x) = \frac{4}{x}$

7. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$
   Bestimme die Fläche unterhalb des Graphen und der Tangente an der Stelle x = 3, begrenzt durch die x-Achse

8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 5$
   An der Stelle x = 0 berührt die Tangente den Graphen, die mit beiden Koordinatenachsen ein Dreieck bildet. In welchem Verhältnis stehen die durch den Funktionsgraphen f(x) geteileten Flächen das Dreieck?

9. Bestimme die Integrationsgrenze x

   1. $\int_2^x (-2t + 5)\, dt = |-2\,|$
   2. $\int_x^4 (t^2 - 4) dt = |\,9\,|$

10. Bestimme den Flächeninhalt der Funktionen

1. $\int_0^5 [(x^2 + 4x + 3) \cdot e^x]\mathrm{dx}$

2. $\int_{-u}^0 [(x^2 - 5x + 7) \cdot e^x]dx$

11. Bestimmung von Funktionsgleichungen bei vorgegebener Fläche

1. Eine Parabel schneidet die x-Achse bei$x = 0$ und bei $x = 4$.
   Das Flächenstück zwischen Parabel und x-Achse hat die Maßzahl $\frac{32}{3}$.
   Wie lautet die Gleichung der Parabel?

2. Eine Parabel schneidet die x-Achse bei$x = -3$ und bei $x = -1$.
   Das Flächenstück zwischen Parabel und x-Achse hat die Maßzahl $\frac{8}{3}$.
   Wie lautet die Gleichung der Parabel?

3. $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
   Der Graph von $f(x)$ berührt bei $x = \pm 2$ die x-Achse und schließt mit dieser eine Fläche der Maßzahl $34{,}1\overline{3}$ ein.
   Wie lautet die Funktionsgleichung?

12. Ein Regenrückhaltebecken läuft durch Strakregen, der morgens um 8:00h beginnt stetig voll. $x = 0$ bedeutet dabei 8:00h.
    Die Zulaufrate ist durch die Funktion $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$ bestimmt.

    1. Wann ist das Becken komplett vollgelaufen?
    2. Wie viel m^3 (FE x 1000) befinden sich dann im Rückhaltebecken?
    3. Wann ist der meiste Zulauf, bzw. Ablauf der Regenmenge?
    4. Um wie viel Uhr hat das Becken wieder seinen Anfangsbestand erreicht?
    5. Beweise rechnerisch, dass das Zulaufwasser wieder abgeflossen ist.

13. Bestimme die Maßzahl der Fläche im angegebenen Intervall

1. $f(x) = 5 \quad [0; 3]$
2. $f(x) = 5x \quad [0; 1{,}5]$
3. $f(x) = 0{,}5x + 2 \quad [0; 4]$
4. $f(x) = -1{,}5x + 4 \quad [0; 6]$
5. $f(x) = x^2 + 2x \quad [0; 2]$
6. $f(x) = x^3 + 2 \quad [0; 3]$
7. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 \quad [0; 3]$
8. $f(x) = \sqrt{x} \quad [0; 1]$
9. $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x} \quad [0; 3]$
10. $f(x) = \sqrt[4]{x^3} \quad [0; 3]$
11. $f(x) = e^x \quad [-2; 2]$
12. $f(x) = \frac{1}{x^2} \quad [-1; 1]$
13. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3} - 2x \quad [0; 2]$
14. $f(x) = -x^3 + x \quad [-1; 1]$
15. $f(x) = (x + 2)^2 \quad [-1; 2]$
16. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \quad [0; 5]$
17. $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 1 \quad [1; 4]$
18. $f(x) = -x^3 + 3x + 2 \quad [-1{,}5; 1]$
19. $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad [1; 5]$
20. $f(x) = x^4 - 4x^2 \quad [-2{,}5; 2{,}5]$

Bestimme zu den Aufgaben 17 und 19 den Mittelwert der Fläche.

14. Berechne die Maßzahl der Fläche zwischen den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im angegebenen Intervall

1. $f(x) = x + 2$ und $g(x) = 3 \quad [1; 3]$
2. $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = \frac{1}{4}x - 1 \quad [0; 3]$
3. $f(x) = 3x - 1$ und $g(x) = -x \quad [x_s; 2]$
4. $f(x) = -2x^2 + 1$ und $g(x) = -x - 2 \quad [x_{s1};\ x_{s2}]$
5. $f(x) = x^3$ und $g(x) = x \quad [-1; 0]$

15. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x-1)^2 - 1$. Bestimme die Maßzahl der Fläche zwischen den Nullstellen. Wie muß die obere Grenze gewählt werden, damit sich die gleiche Flächenmaßzahl rechts reben der Nullstelle befindet?

16. Bestimme den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = -x^3 + x$ und der Normalen im Wendepunkt eingeschlossen wird.

17. Bestimme die Fläche der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0; 3]$ durch den Durchschnittsbetrag von Ober- und Untersumme mit der Schrittweite 1. Vergleiche das Ergebnis mit dem genauen Maß von

$$\int_0^3 x^2\, dx.$$

18. Ein römisches Aquädukt bei Nimes überspannt eine Breite von 10 Metern, ist 4 Meter hoch und 3 Meter tief. Sein Durchgang ist parabelförmig mit einer Höhe von 3 Metern und einer Breite von 4 Metern.
Wie viel m^3 Sandstein mußten hierzu verbaut werden?

1. Gegeben sind die Punkte $A\ (8;4;-1)$ und $B\ (10;5;-3)$.
   Stelle eine Gleichung der Geraden $g:\vec{x}$ durch A und B auf.

2. Prüfe, ob die Punkte $P\ (2;1;5)$ und $Q\ (1;1;-1)$ auf $g:\vec{x}$ liegen.

3. Zeige, dass $g:\vec{x}$ und $h_1:\vec{x}$ **parallel** sind.

$$h_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\2{,}5\\-5\end{pmatrix}$$

4. Zeige, dass $g:\vec{x}$ und $h_2:\vec{x}$ **identisch** sind.

$$h_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix}$$

5. Zeige, dass $g:\vec{x}$ und $h_3:\vec{x}$ **sich schneiden**

$$h_3:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

6. Zeige, dass $g:\vec{x}$ und $h_4:\vec{x}$ **windschief** sind.

$$h_4:\vec{x}=\begin{pmatrix}13\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$$

7. „zu 2“ liegt der Punkt nicht auf der Geraden, dann bestimme den Abstand von der Geraden zum Punkt.
   „zu 5“ bestimme den Schnittwinkel unter dem sich die Geraden schneiden.
   „zu 6“ bestimme den Abstand der windschiefen Geraden zueinander.

Vektorrechnung Gerade I

1. Gegeben sind die Punkte eines Quadrats.
   Bestimme die beiden **fehlenden Punkte**.

   $\boldsymbol{A} = (3; 0; 0); \boldsymbol{B} = (\mathrm{b}_1; \mathrm{b}_2; \mathrm{b}_3); \boldsymbol{C} = (\mathrm{c}_1; \mathrm{c}_2; \mathrm{c}_3); \boldsymbol{D} = (-1; 3; 0)$

2. Bestimme die **Geradengleichungen** $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ und $\overrightarrow{\boldsymbol{BD}}$,
   sowie ihren **Schnittpunkt** $\boldsymbol{M}$.

3. Bestimme die **Geradengleichungen** $\overrightarrow{A\mathbf{B}}$ und $\overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$.
   Untersuche auf **Parallelität**.

4. Bestimme den **Abstand** $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ und $\boldsymbol{B}$.

5. Bestimme den **Winkel** $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ und $\overrightarrow{\boldsymbol{B}\mathbf{D}}$.

6. Bestimme den Punkt der **Streckenhalbierenden** $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$.

7. Bestätige die **Punktprobe** M auf $\overrightarrow{\boldsymbol{DB}}$.

8. Bestimme den **Winkel α** unter dem sich die Strecken $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ und $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ schneiden.

9. Bestimme die Größe der **Quadratfläche**.

1. Gegeben ist der Punkt der Pyramidenspitze $\boldsymbol{S} = (2{,}5; 3{,}5; 7)$

   Bestätige, dass es sich um eine **gerade Pyramide** handelt.

2. Bestimme $\boldsymbol{m_1} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\boldsymbol{AS}}$ und $\boldsymbol{m_2} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\boldsymbol{CS}}$,

3. Bestimme die Geradengleichungen $\boldsymbol{p}: \vec{\boldsymbol{x}}$ aus $\overrightarrow{\boldsymbol{m_1 C}}$ und $\boldsymbol{q}: \vec{\boldsymbol{x}}$ aus $\overrightarrow{\boldsymbol{m_2 A}}$,
   sowie deren Schnittpunkt.

4. Liegt dieser **Schnittpunkt** auf der Geraden $\overrightarrow{\boldsymbol{MS}}$

5. In welchem **Verhältnis** teilt dieser Schnittpunkt die Pyramidenhöhe $\overrightarrow{\boldsymbol{MS}}$

6. In welcher **Lagebeziehung** stehen die Geraden $\overrightarrow{\boldsymbol{MS}}$ und $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$

7. Bestimme den **Abstand** der **windschiefen Geraden**.

8. Bestimme den **Abstand** $\overrightarrow{\boldsymbol{SC}}$.

9. Bestimme den **Winkel α** unter dem sich die Strecken $\overrightarrow{\boldsymbol{SB}}$ und $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ schneiden, sowie den **Winkel β** unter dem sich die Strecken $\overrightarrow{\boldsymbol{SB}}$ und $\overrightarrow{\boldsymbol{SC}}$ schneiden.

10. Bestimme den **Abstand** von $\boldsymbol{S}$ zu $\boldsymbol{q}: \vec{\boldsymbol{x}}$**.**

11. Berechne die **Oberfläche der Pyramide**

12. Berechne das **Volumen der Pyramide**.

1. Gegeben sind die Punkte $\boldsymbol{A} = (0; -5; 5)$ und $\boldsymbol{B} = (-5; 5; 0)$.
   Bestimme die dazugehörige **Geradengleichung** sowie alle **Spurpunkte**.

2. Gegeben sind die Punkte $\boldsymbol{A} = (6; 0; 0)$, $\boldsymbol{B} = (0; 4; 0)$, $\boldsymbol{C} = (0; 0; 8)$.
   Bestimme eine entsprechende Ebenengleichung ($\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{x_1}$) in der **Parameterform** und in der **Koordinatenform**.

3. Gegeben sind die Punkte $\boldsymbol{D} = (0; -4; 2)$, $\boldsymbol{E} = (3; 5; 5)$
   Bestimme eine entsprechende Geradengleichung ($\boldsymbol{g}$: $\overline{\boldsymbol{x}}$) sowie deren Lage zur Ebene ($\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{x_1}$).

4. Bestätige den **Schnittpunkt** aus *Aufgabe 3* durch eine entsprechende **Punktprobe**.

5. Bestimme den entsprechenden **Schnittwinkel** $\boldsymbol{\alpha}$.

6. Gegeben sind die Punkte $\boldsymbol{F} = (9; 0; 0)$, $\boldsymbol{G} = (0; 6; 0)$.
   Bestimme eine entsprechende Geradengleichung ($\boldsymbol{h}$: $\overline{\boldsymbol{x}}$) sowie deren Lage zur Ebene ($\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{x_1}$).

7. Gegeben sind die Punkte $\boldsymbol{H} = (6; 0; 0)$, $\boldsymbol{I} = (0; 0; 8)$.
   Bestimme eine entsprechende Geradengleichung ($\boldsymbol{i}$: $\overline{\boldsymbol{x}}$) sowie deren Lage zur Ebene ($\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{x_1}$).

8. Bestimme den **Abstand** vom Ursprung zur Ebene ($\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{x_1}$).

9. Bestimme den **Abstand** der parallelen Geraden zur Ebene ($\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{x_1}$).

10. Skizziere alle Berechnungen.

1. Gegeben sind die Punkte $\boldsymbol{A} = (2;1;3)$, $\boldsymbol{B} = (3;3;4)$ und $\boldsymbol{C} = (3;1;3)$
Bestimme die Ebengleichung $(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{x_1})$ in der Parameter- und Koordinatenform.

2. Überprüfe, ob die Punkte $\boldsymbol{D} = (2;3;4)$ *und* $\boldsymbol{E} = (3;0;2)$ auf der Ebene liegen.
Bestimme ggf. den **Abstand** vom Punkt zur Ebene $(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{x_1})$.

3. Zeige, dass $(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{x_1})$ und $(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{x_2}) = \begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ **parallel** sind.
Bestimme den Abstand der Ebenen voneinander.

4. Zeige, dass $(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{x_1})$ und $(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{x_3}) = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}12\\22\\11\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ **identisch** sind.

5. Zeige, dass $(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{x_1})$ und $(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{x_4}) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ sich **schneiden**.
Bestimme die Schnittgerade in der Parameterform sowie den entstehenden **Schnittwinkel α**.

6. Bestimme die **Schnittgeraden** der Ebenen aus den gegebenen **Ebenenformen -**

$(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{x_5}) = \begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-5\\0\\-1\end{pmatrix}$ und $(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{x_6})\ \ x_1 - x_2 + 3x_3 = 12$

$(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{x_7})\ \ 3\,x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$ und $(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{x_8})\ \ 3x_2 - 3x_3 = 6$

Vektorrechnung Abstände

1. Abstand Punkt / Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = (2; 1; 0) \qquad L = 3$$

2. Abstand windschiefer Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L = 2$$

3. Abstand Punkt / Ebene

$$\text{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad P = (1; -3; 1) \qquad L = 3$$

4. Abstand parallele Gerade / Ebene

$$\text{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon(\dots) \qquad L = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

5. Abstand parallele Ebene / Ebene

$$\text{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon(\dots) + \eta(\dots) \qquad L = \frac{10}{\sqrt{35}}$$

Stochastische Matrizen

1. Für drei Tankstellen sollen folgende Annahmen gelten …

   Die Kunden von A verteilen sich beim nächsten Tanken auf die Tankstellen A,B und C im Verhältnis 2 : 1 : 1.
   Die Kunden von B wechseln das nächste Mal je zu 25% zu A und zu C.
   80% der Kunden von C wählen die Tankstelle auch das nächste Mal, der Rest fährt zu A.
   Jeder Kunde tankt pro Woche ein Mal.

   1. Stelle das Wechselverhalten in einer Übergangsmatrix dar.
   2. In einer bestimmten Woche tanken von insgesamt 1.000 Autofahrern 400 bei B und je 300 bei A und C. Berechne die Verteilung der Autofahrer in den nächsten drei Wochen.
   3. Bestimme die stabile Verteilung.

2. Die Kunden dreier Supermärkte kaufen immer in einem der drei Märkte von Woche zu Woche nach folgenden Regeln …

   40% von A bleiben auch dort, 30% wechseln zu B und 30% zu C.

   50% der B Kunden bleiben bei B, 20% wechseln zu A und 30% zu C.

   30% der C Kunden bleiben bei B, 50% wechseln zu A und 20% zu B.

   1. Bestimme die dazugehörige Übergangsmatrix.
   2. Für die Startverteilung gilt 60% A, 30% B und 10% C.
      Wie sieht die Verteilung nach zwei Wochen aus?
   3. Bestimme die Gleichgewichtsverteilung für eine Gesamtzahl von 16.000 Kunden.

1. In einer Urne befinden sich fünf Kugeln, 2 x weiße und 3 x schwarz.
   Es sollen nacheinander zwei Kugeln herausgezogen werden.
   1. Mit zurücklegen der gezogenen Kugel,
   2. Ohne zurücklegen der gezogenen Kugel.

   Bestimme folgende Ereignisse …

   1. die Kugeln sind von gleicher Farbe,
   2. die Kugeln sind nicht von gleicher Farbe,
   3. die erste Kugel ist schwarz,
   4. die zweite Kugel ist weiß.

2. Bei der Produktion von Gummienten fallen erfahrungsgemäß 2,5 % Schäden bei der Produktion und 4,2 % Schäden bei der Lackierung an.
   Wie groß ist bei zufälliger Entnahme einer Gummiente die Wahrscheinlichkeit, dass die Ente …
   1. einen Herstellungsfehler,
   2. einen Lackierungsfehler,
   3. keinen Fehler hat?

3. Die ersten Spielepaarungen einer Volleyballmeisterschaft sollen ermittelt werden.

   4 Mannschaften sind aus Österreich,

   3 Mannschaften sind aus der Schweiz und

   5 Mannschaften sind aus Deutschland.

   Bestimme die Wahrscheinlichkeit für folgende Paarungen …

   1. die erste Mannschaft ist aus der Schweiz,
   2. die zweite Mannschaft ist aus Österreich,
   3. die erste Mannschaft ist nicht aus Deutschland,
   4. und die zweite Mannschaft soll nicht aus der Schweiz sein.

4. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit …

   1. zwei gleiche Zahlen zu werfen,
   2. ersten Wurf kleiner als 3, im zweiten Wurf eine 6,
   3. die erste geworfene Zahl ist kleiner, als die zweite Zahl.

4. Auf einem Glücksrad mit acht gleichgroßen Feldern stehen die Zahlen 1 bis 8. Es wird zweimal gedreht. Danach wird die kleinere von der größeren Zahl abgezogen. Sind beide gleich, so ist das Ergebnis null.
   Bestimme die folgenden Wahrscheinlichkeiten …

   1. das Ergebnis soll 0 sein
   2. das Ergebnis soll 7 sein
   3. das Ergebnis soll 1 sein
   4. das Ergebnis soll größer 4, aber kleiner 1 sein.

5. Zwei Würfel werden gleichzeitig geworfen.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Ergebnis …

   1. die Augensumme 6,
   2. die Augensumme größer 4,
   3. eine gerade Augensumme,
   4. die Augensumme kleiner 5, aber größer 9.

6. Eine Skatspielkarte wird verdeckt aus einem Spiel mit 32 Karten gezogen.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Ergebnis …

   1. ein König oder eine Dame,
   2. rot oder Karo,
   3. schwarz, oder eine Zahl,
   4. Bild- oder Kreuzkarte.

7. An einem internationalen Kongress nehmen Wissenschaftler aus vielen Ländern teil. 85% sprechen Englisch, 32% sprechen Französisch und 23% Russisch. Ein Wissenschaftler wird zufällig angesprochen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er …

   1. englisch und französisch,
   2. englisch und russisch,
   3. französisch und russisch,
   4. englisch, französisch und russisch spricht?
      Bestimme die jeweils die minimale und maximale Wahrscheinlichkeit.

8. Ein gemischter Stapel eines Kartenspiels mit 32 Karten wird verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Herz Ass als …

   1. erste Karte,
   2. zweite Karte,
   3. oder fünfte Karte gezogen?

9. Vier Dinge sollen in einer bestimmten Reihenfolge geordnet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit die richtige Reihenfolge zu erraten?

10. Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten werden nacheinander 8 Karten gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Kreuz-Karten sind?

11. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Lottospiel 6 aus 49 …

    1. eine richtige Zahl,
    2. drei richtige Zahlen,
    3. oder sogar 6 richtige Zahlen zu ziehen?

12. In einem Kurs mit 12 Jungen und 13 Mädchen werden 5 Freikarten verlost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen …

    1. fünf Karten,
    2. zwei Karten,
    3. oder keine Karte an die Mädchen?

13. In einer Urne befinden sich 6 rote, 5 blaue und 4 grüne Kugeln. Drei Kugeln werden mit einen Griff entnommen.
    Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind folgende Entnahmen darunter …

    1. 1x rot, 1x blau und 1x grün.
    2. 2x rot und 1x blau.
    3. 2x grün.
    4. keine grüne Karte.

14. An einem *„Mensch-Ärgere-Dich-Nicht“* Spiel nehmen 4 Personen teil. Mit einer gewürfelten 6 kann der entsprechende Spieler einen Stein in das Spiel einsetzen. Bestimme die Zufallsverteilung X: der Spieler kann heraussetzen.

    Mit welcher Wahrscheinlichkeit entstehen folgende Situationen ..

    1. höchstens zwei Spieler können heraussetzen.
    2. mehr als ein Spieler kann heraussetzen.
    3. mindestens drei Spieler können heraussetzen.
    4. mehr als einer, aber weniger als vier Spieler können heraussetzen.

15. 25% aller Wahlberechtigten sind jünger als 30 Jahre, 75% jünger als 60 Jahre. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 8 zufällig ausgesuchten Wahlberechtigten …

    1. genau 2 Personen,
    2. mehr als 2 Personen unter 30 Jahre alt sind.
    3. genau 6 Personen,
    4. mindestens 6 Personen unter 60 Jahre alt sind.

16. Ein *Multiplle-Choice-Test* besteht aus 50 Items mit jeweils 5 Antworten, von denen jeweils nur eine richtig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man durch Raten folgende Behauptungen richtig beantworten …

    1. mehr als 20 Items,
    2. mindestens 10 und höchstens 20 Items,
    3. weniger als 10 Items,
    4. genau 15 Items sind richtig.

17. Stelle folgende Daten eines Zeitungsartikels als Baumdiagramm dar. Konstruiere dann dazu die Vierfeldertafel und rekonstruiere das Baumdiagramm …

    „Wird der Lehrerberuf zunehmend zu einem Frauenberuf?

    64% aller Studierenden des Lehramtes sind Frauen. Bei den übrigen Studiengängen beträgt der Anteil an Frauen nur 38,6%. Insgesamt geben 11,7% der an den Hochschulen Deutschlands eingeschriebenen Studenten als Studienziel den Lehrerberuf an.“

18. Nach Zahlung von **1,-€** darf der Glücksspieler aus einer Urne mit 10 Kugeln (4x weiß und 6x schwarz) eine Kugel ziehen, deren „Farbe“ ihn zu jeweils einer weißen und schwarzen Urne weiterführt, in denen folgende Zahlenkugeln liegen –

    weiße Urne: 1x **0**; 2x **1**; 2x **2**

    schwarze Urne: 2x **0**; 1x **1**; 1x **2** und 1x **5.**

    Die aufgedruckte Ziffer gibt jeweils den Gewinn an.

    1. Berechne den Erwartungswert.
    2. Berechne die Standardabweichung.
    3. Wie muss man den Einsatz ändern, damit das Spiel „fair“ ist?
    4. Wie hoch muß der höchste Gewinn sein, damit das Spiel „fair“ ist?

19. Die Zugtiefe der Binomialverteilung ist 100 und die Erfolgswahrscheinlichkeit 60%

    1. Berechne den Erwartungswert
    2. Berechne die Standardabweichung
    3. Berechne die Wahrscheinlichkeit des σ-Intervalls und des 2σ-Intervalls.

Zahlenfolgen I. Bildungsgesetz der Zahlenfolge

Bestimme das Bildungsgesetz der Zahlenfolge in explizierter Form

1.	$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	n
2.	$\{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$	$-n$
3.	$\{-1, 2, -3, 4, \ldots\}$	$n \cdot (-1)^n$
4.	$\{1, -2, 3, -4, \ldots\}$	$n \cdot (-1)^{n+1}$
5.	$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$	$\frac{1}{n}$
6.	$\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$	$\left(\frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^n$
7.	$\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\right\}$	$\left(\frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^{n+1}$
8.	$\{-5, -4, -3, -2, \ldots\}$	$n-6$
9.	$\left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots\right\}$	$\left(\frac{1}{n-6}\right) \cdot (-1)^n$
10.	$\{1, 5, 9, 13, \ldots\}$	$4n-3$
11.	$\{23, 20, 17, 14, \ldots\}$	$-3n+26$
12.	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$	$\frac{n}{n+1}$
13.	$\left\{\frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}, \ldots\right\}$	$\frac{3n+2}{n+1}$
14.	$\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$	n^2

15. $\{9, 16, 25, 36, \ldots\}$ $(n+2)^2$

16. $\{4, 16, 36, 64, \ldots\}$ $(2n)^2$

17. $\{4, 7, 12, 19, \ldots\}$ $n^2 + 3$

18. $\{3, 9, 27, 81, \ldots\}$ 3^n

19. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Zahlenfolgen II. Folgen und Reihen

1. Stelle die ersten fünf Glieder einer arithmetrischen Folge auf …
   $a_1 = 2\,; d = 5$ $a_1 = 10\,; d = -4$

2. Gegeben sind zwei Glieder einer arithmetrischen Folge.
   Berechen d und a_1
   $a_4 = 7\,; a_6 = 13$ $a_3 = 2\,; a_8 = -18$

3. Addiere (subtrahiere) die beiden Zahlenfolgen und zeige, dass die Ergebisfolgen wieder arithmetrisch sind.
   a) 1, 5, 9, 13, 17 und 2, 7, 12, 17, 22
   b) 5, 3, 1,-1, -3 und -2, 2, 6, 10, 14

4. Das erste Glied einer Folge ist $a_1 = 5$, das sechste $a_6 = 15$ Wie groß ist die Differenz der Folge und welche Summe hat die aus acht Gliedern bestehende Reihe?

5. Gegeben sind in einer arithmetrischen Folge $a_5 = 6$ und $a_9 = 9$. Wie groß Sind a_1 und d? Welche Summe hat die Reihe der ersten neun Glieder?

6. Die Summe einer arithmetrischen Reihe aus acht Gliedern ist $s_8 = 8$, die Differenz $d = 2$. Wie heißt das Anfangsglied a_1?

7. Zwischen die Glieder der arithmetrischen Folge 1, -5, -11 … sollen je drei Glieder eingeschaltet werden, dass wieder eine arithmetrische Folge entsteht.

8. Von einer geometrischen Folge sind bekannt $a_1\,, q\ und\ n.$
   Bestimme a_n und s_n. $a_1 = 3\,;\ q = 2\,;\ n = 5$
   $a_1 = -2\,;\ q = 3\,;\ n = 6$

9. In einer geometrischen Folge sind gegeben $a_n, q\ und\ n.$
   Bestimme a_1 und s_n. $a_n = 62500\,; q = 5\,;\ n = 7$
   $a_n = -2389\frac{1}{3}\,; q = 4\,;\ n = 6$

10. Wie groß sind a_1 und a_n, wenn in einer geometrischen Folge s_n, q und n gegeben sind? $s_n = 11718\,;\ q = 5\,;\ n = 6$
    $s_n = -1275\,;\ q = 2\,;\ n = 8$

Zahlenfolgen III. Monotonie und Grenzwert unendlicher Zahlenfolgen

1. Untersuche die Zahlenfolge auf Monotonie

$a_n = \langle \frac{1}{n^2} \rangle$ $a_n = \langle \frac{1}{n+1} \rangle$ $a_n = \langle \frac{n+1}{n} \rangle$

$a_n = \langle \frac{3n-1}{n+1} \rangle$ $a_n = \langle 2n^2 \rangle$ $a_n = \langle 2 + \frac{1}{n} \rangle$

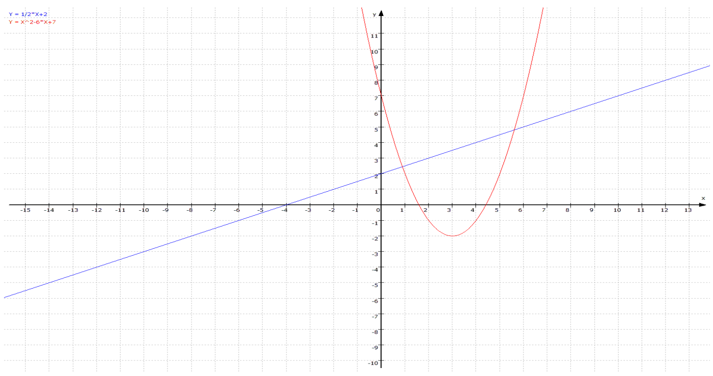
2. Bestimme die Grenzwerte der Zahlenfolge

$a_n = \langle \frac{4n-1}{n+1} \rangle$ $a_n = \langle \frac{3n+1}{2n+1} \rangle$ $a_n = \langle \frac{4n}{2-n^2} \rangle$

$a_n = \langle \frac{n^2+n+1}{2n-1} \rangle$ $a_n = \langle \frac{3n^3+n^2-2n}{n-n^2+2n^3} \rangle$ $a_n = \langle \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n}\right) \rangle$

1. Definitionsbereich $D \in R$

2. Wertebereich $W \in R$; $y \leq \cdots$; $y \geq \cdots$



3. Symmetrieverhalten
   achsensymmetrisch $f(x) = f(-x)$

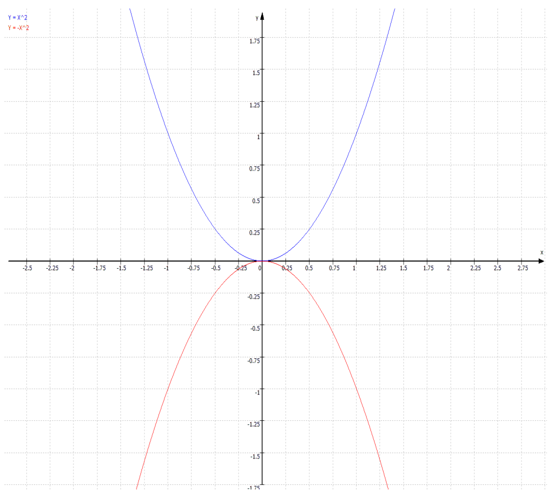
   punktsymmetrisch zum Ursprung $f(-x) = -[f(x)]$

4. Randverhalten in den höchsten Potenzteil der Funktion einsetzen …

$$\lim_{\overrightarrow{x - \infty}} = \pm\infty$$

$$\lim_{\overrightarrow{x + \infty}} = \pm\infty$$

$f(x) = x^2$ $f(x) = x^3$



$f(x) = -x^2$ $f(x) = -x^3$

5. Ableitungen div. Verfahren (s.o.)

6. Nullstellen $f(x) = 0$

7. Achsenabschnitt $f(0) = \cdots$

8. Extrema

notwendige Bedingung $f'(x) = 0; \quad f(x) = y$

hinreichende Bedingung

$f''(x) > 0 \quad Minimum$
$f''(x) < 0 \quad Maximum$

9. Wendepunkt

notwendige Bedingung $f''(x) = 0; \quad f(x) = y$

hinreichende Bedingung $f'''(x) \neq 0$

10. Monotonie

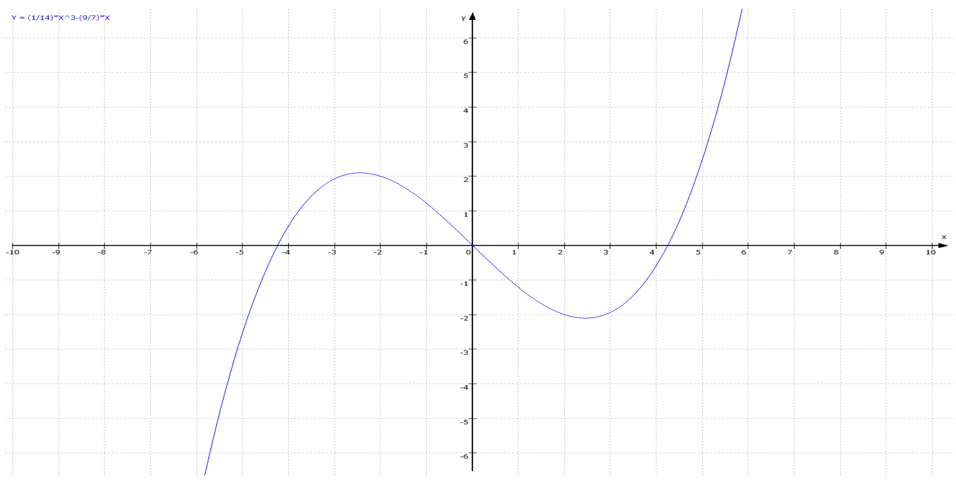
links und rechts von der Extremalstelle

$f'(x) > 0 \quad monoton\ steigend$
$f'(x) < 0 \quad monoton\ fallend$

11. Krümmung

links und rechts von der Wendestelle

$f''(x) > 0 \quad Linkskrümmung$
$f''(x) < 0 \quad Rechtskrümmung$



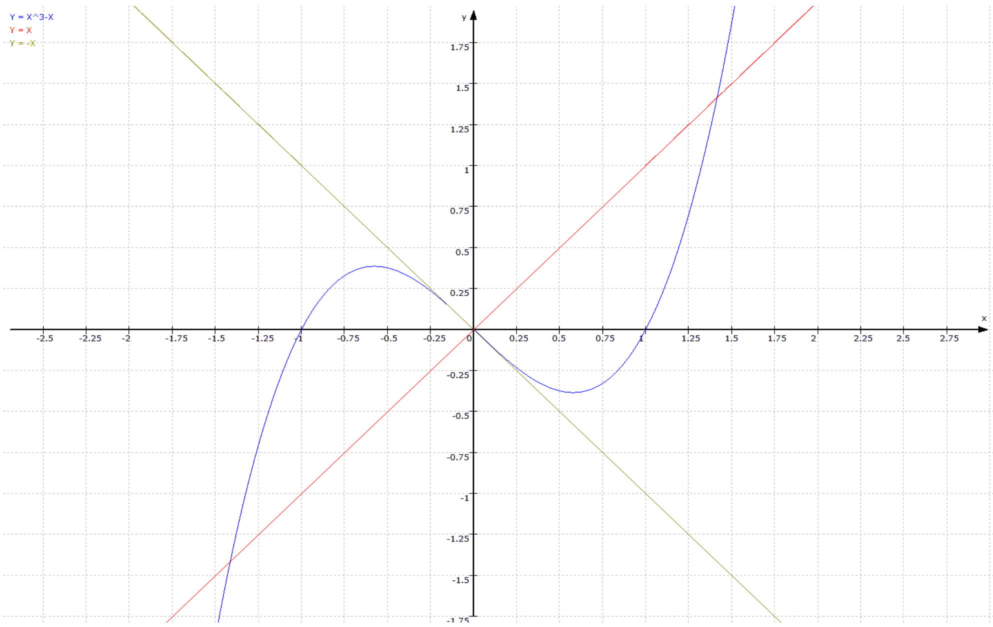
12. Tangentenfunktion

$$y_t = m_t x + b$$

13. Normale

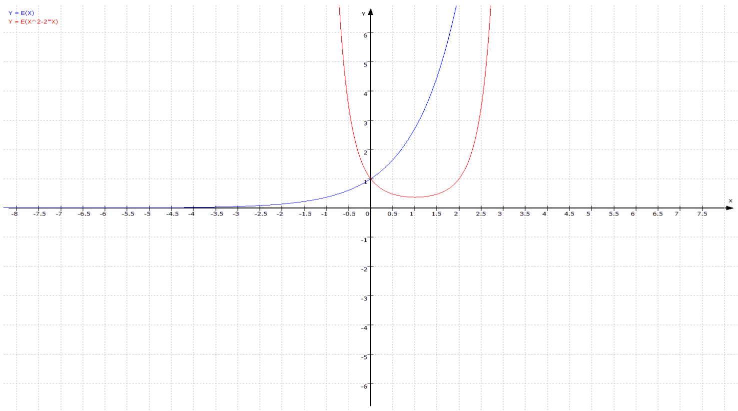
$$m_o = -\frac{1}{m_t}$$

$$y_o = m_o x + b$$



1. Definitionsbereich $D \in R$

2. Wertebereich $W \in R$; y $\leq \cdots$; $y \geq \cdots$



3. Symmetrieverhalten
   achsensymmetrisch $f(x) = f(-x)$

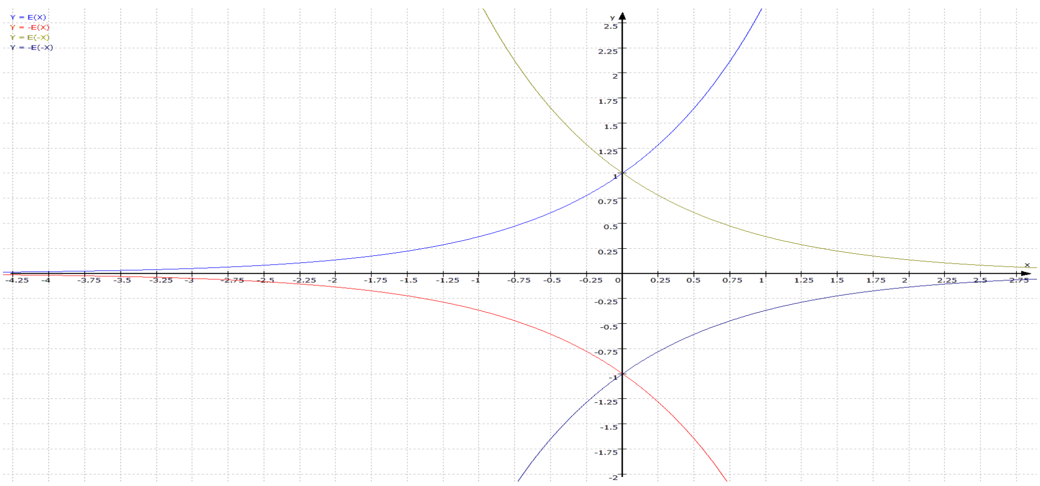
   punktsymmetrisch zum Ursprung $f(-x) = -[f(x)]$

4. Randverhalten in den höchsten Potenzteil der Funktion einsetzen …

$$\lim_{x \to -\infty} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} = \pm\infty$$

$f(x) = e^{-x}$ $f(x) = e^{x}$



$f(x) = -e^{-x}$ $f(x) = -e^{x}$

5. Ableitungen div. Verfahren (s.o.)

6. Nullstellen $f(x) = 0$

7. Achsenabschnitt $f(0) = \cdots$

8. Extrema

notwendige Bedingung $f'(x) = 0; \quad f(x) = y$

hinreichende Bedingung

$f''(x) > 0 \quad Minimum$
$f''(x) < 0 \quad Maximum$

9. Wendepunkt

notwendige Bedingung $f''(x) = 0; \quad f(x) = y$

hinreichende Bedingung $f'''(x) \neq 0$

10. Monotonie

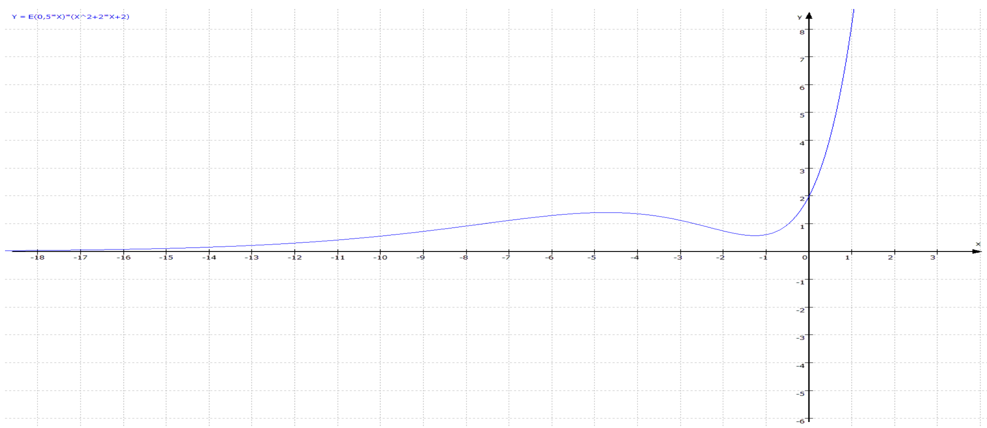
links und rechts von der Extremalstelle

$f'(x) > 0 \quad monoton\ steigend$
$f'(x) < 0 \quad monoton\ fallend$

11. Krümmung

links und rechts von der Wendestelle

$f''(x) > 0 \quad Linkskrümmung$
$f''(x) < 0 \quad Rechtskrümmung$



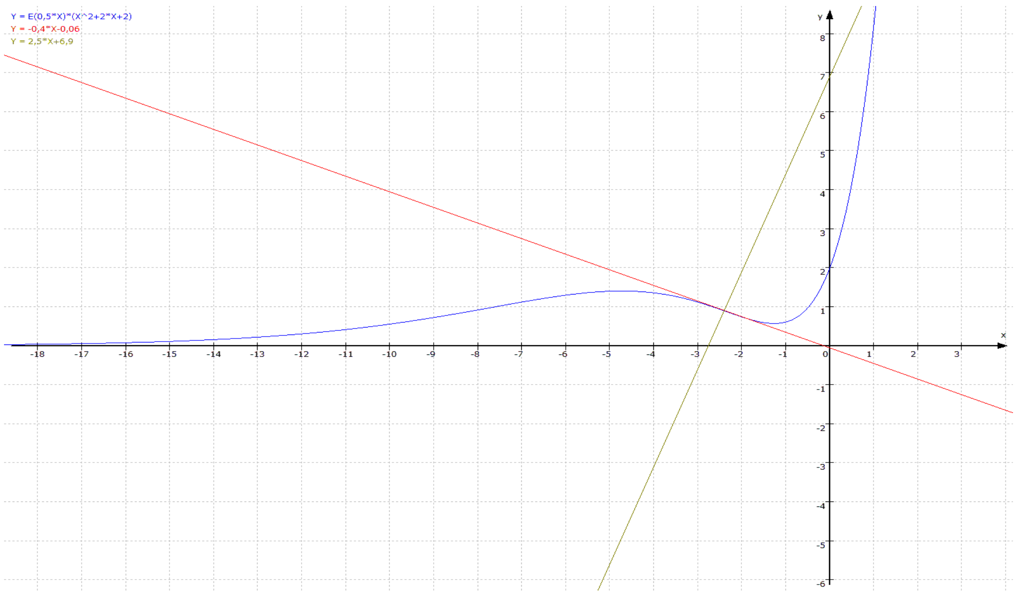
12. Tangentenfunktion

$$\boldsymbol{y_t = m_t x + b}$$

13. Normale

$$m_o = -\frac{1}{m_t}$$

$$y_o = m_o x + b$$



Gegeben ist …

1. Normalparabel $x^2 + ax + b = y$
2. Parabel $ax^2 + bx + c = y$
3. Polynom 3.Grades $ax^3 + bx^2 + cx + d = y$
4. Achsensym. Funktion 4. Grades $ax^4 + bx^2 + c = y$
5. Punktsym. Funktion 3. Grades $ax^3 + bx \quad = y$

6. Ableitungen bilden z.B. Polynom 3. Grades …

$ax^3 + bx^2 + cx + d = y$	$f\ddot{u}r\ Punkte\ \ x = \cdots\ und\ \ y = \cdots$
$3ax^2 + 2bx + c = y'$	$Extrema,\ max,\ min,\ Steigung$
$6ax + 2b = y''$	$Wendestellen,\ Sattelstellen$

7. Stelle … $x = \cdots$
8. Punkt … $x = \cdots\ \ und\ \ y = \cdots$
9. Extrempunkt $f'(x) = 0$
10. Wendepunkt $f''(x) = 0$
11. … horrizontale Tangente… $Extrema\ oder\ Sattelpunkt$
12. Sattelpunkt … $x = \cdots\ \ und\ \ y = \cdots\ \ ;$ $f'(x) = 0\ \ und\ \ f''(x) = 0$
13. Tangente an Funktion $f'(x) = m$
14. Normale an Funktion $-\frac{1}{m_o} = m_t\ \ und\ \ f'(x) = m_t$
15. … stärkste oder schwächste Steigung $f''(x) = 0$
16. Steigung in Grad $\tan^{-1}(1) = 45°$
17. Grad in Steigung $\tan(45) = 1$

Vorgehensweise zur Lösung von Extremwertaufgaben

1. Aus dem Text entnehmen, welche Extremalbedingung zu berechnen ist. (Zielbedingung!)
2. Sachverhalt skizzieren.
3. Randbedingungen festlegen.
4. Neben- und Zielbedingung formulieren.
5. Nebenbedingung zu einer Variablen der Zielbedingung umformen und in die Zielbedingung einsetzen.
6. Gleichung vereinfachen.
7. Erste Ableitung der Zielbedingung bestimmen und Null setzen.
8. Gleichung lösen.
9. Ergebnisse mit den Randbedingungen vergleichen, evtl. Lösungen verwerfen.
10. Variable in die Nebenbedingung einsetzen und damit die zweite Variable berechnen.
11. Extremum berechnen, Lösung der Fragestellung.
12. Über die zweite Ableitung das hinreichende Kriterium beweisen.

1. Arithmetrische Folgen und Reihen

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

oder

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

m Glieder in $a_n = Z_a \dots Z_e$ einfügen

$$d = \frac{Z_e - Z_a}{m+1}$$

2. Geometrische Folgen und Reihen

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

m Glieder in $a_n = Z_a \dots Z_e$ einfügen

$$d = \sqrt[m+1]{\frac{Z_e}{Z_a}}$$

3. Zinseszins

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

4. Annuität

$$A = \frac{K \cdot q^n \cdot (q-1)}{(q^n - 1)}$$

5. Rentenbarwert

vorschüssig $\bar{R}_0 = \frac{rq(q^n-1)}{q^n(q-1)}$

nachschüssig $R_0 = \frac{r(q^n-1)}{q^n(q-1)}$

6. Rentenendwert

vorschüssig $\bar{R}_n = \frac{rq(q^n-1)}{(q-1)}$

nachschüssig $R_n = \frac{r(q^n-1)}{(q-1)}$

7. Veränderungen des Kapitals durch regelmäßige Einzahlungen oder Auszahlungen

vorschüssiger Endwert $\bar{E}_n = K_0 \cdot q^n + \frac{rq(q^n-1)}{(q-1)}$

$\bar{E}_n = K_0 \cdot q^n - \frac{rq(q^n-1)}{(q-1)}$

nachschüssiger Endwert $E_n = K_0 \cdot q^n + \frac{r(q^n-1)}{(q-1)}$

$E_n = K_0 \cdot q^n - \frac{r(q^n-1)}{(q-1)}$

8. Degressive Abscheibung

$$R_n = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

Zentrale Klausur Prüfung 1.

1. Bestimme die durchschnittliche Steigung (Sekantensteigung) folgender Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$$

$$f(x) = 3x^3 + 3\text{x}$$

$$f(x) = 2{,}5x^4 - \frac{1}{5}x$$

zwischen den Stellen $x = 2$ und $x = 4$.

2. Bestimme bei folgenden Funktionsgleichungen die Steigung an der gegebenen Stelle.
nach dem Differenzenquotienten
nach dem Differenzialquotienten (h-Methode)

$f(x) = x^2$	an der Stelle	$x = 1$
$f(x) = 2x^2 + 2x$	an der Stelle	$x = 2$
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$	an der Stelle	$x = \frac{1}{2}$
$f(x) = 3x^3 + 3$	an der Stelle	$x = 3$

3. Bestimme die erste Ableitung folgender Funktion durch die h-Methode …

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

4. Bestimme die ersten beiden Ableitungen folgender Funktionen …

$$f(x) = 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x^1 - 10$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

Zentrale Klausur Prüfung 2.

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x + 2$

1. Bestimme jeweils die Nullstellen der Funktionen.

2. Bestimme die gemeinsamen Schnittpunkte.

3. Skizziere die Ergebnisse von 1 und 2.

4. Bestimme die Tangentenfunktion an der Stelle $x_0 = 3$

5. Verschiebe die Funktion $h(x) = x^2 + x - 2$ um 4 Stellen nach rechts und um 5 Werte nach unten. Spiegel sie dann mit dem Streckfaktor 2.

6. Bestimme das Randverhalten von $h(x)$.

7. Bestimme das Symmetrieverhalten von $h(x)$.

8. Bilde die 1. Ableitung nach der h-Methode von $h(x)$.

1. Kurvendiskussion

1.1. Bestimme aus folgenden Daten das Polynom 3.Grades –

$P_1(0;-3), P_2\ (2;3), eine\ Wendestelle\ bei\ x = 1\ mit\ der\ Steigung\ m_w = 4$

mögliche Lösung $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$

Bestimme dazu –

1.2. den Definitionsbereich der Funktion
1.3. den Wertebereich der Funktion
1.4. das Symmetrieverhalten der Funktion (rechnerischer Beweis)
1.5. das Randverhalten der Funktion
1.6. die Nullstellen
1.7. den Achsenabschnitt
1.8. die Extrema (notwendiges und hinreichendes Kriterium)
1.9. die Wendepunkte (notwendiges und hinreichendes Kriterium)
1.10. die Funktion der Wendetangente
1.11. die Funktion der Wendenormalen

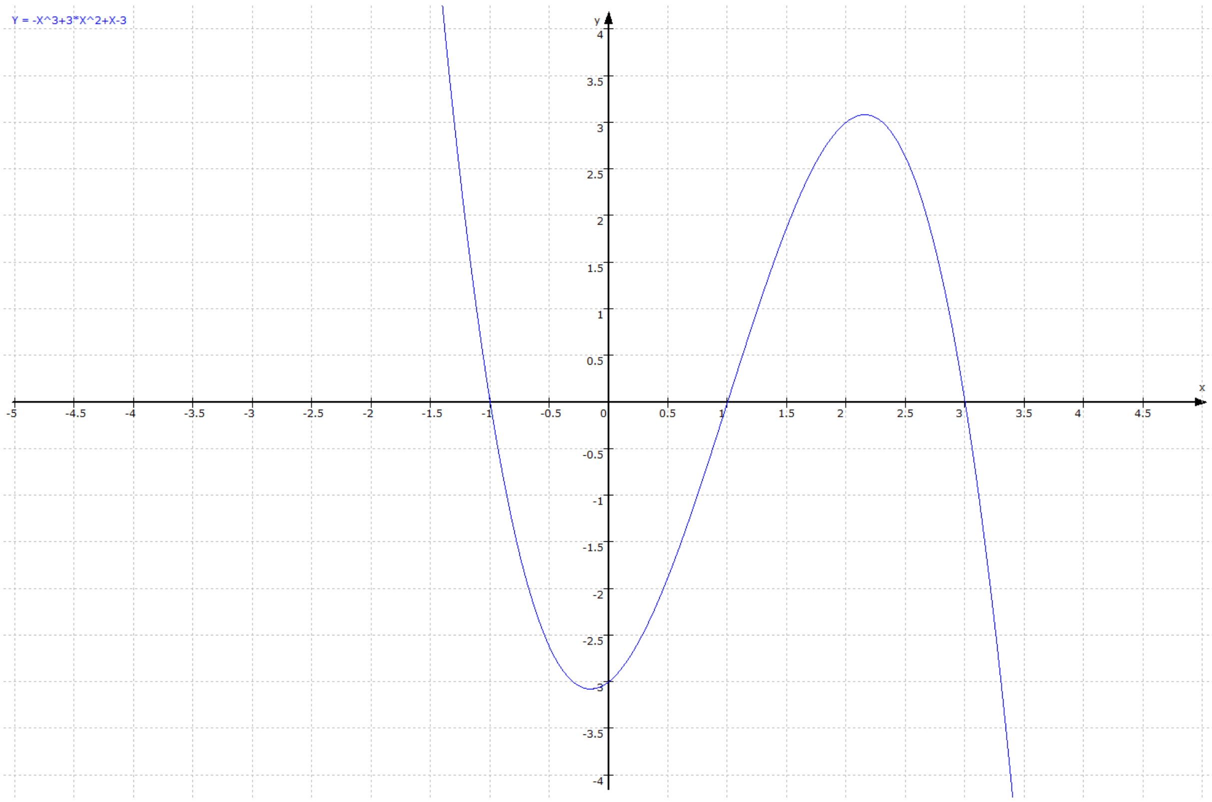
2. Flächenbestimmungen

2.1. Die Tangenten- und die Normalenfunktion an der Stelle $x = 2$ begrenzen mit ihren Nullstellen und gemeinsamen Schnittpunkt ein Dreieck, dessen Fläche bestimmt werden soll.
2.2. Bestimme die Flächeneinheiten zwischen der Tangentenfunktion an der Stelle $x = 2$, der Ordinate, sowie des Funktionsgraphen.
2.3. In welchem Verhältnis stehen die Teilflächen, die zwischen den Nullstellen der Funktion stehen?

3. Extremwertbestimmung

3.1. Im Intervall $[1;3]$ soll die Fläche eines einbeschriebenen, rechtwinklig zur Ordinate verlaufenden Dreiecks bestimmt werden, dessen Fläche maximal sein soll.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$$



4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x^2 - 5x + 7) \cdot e^x$

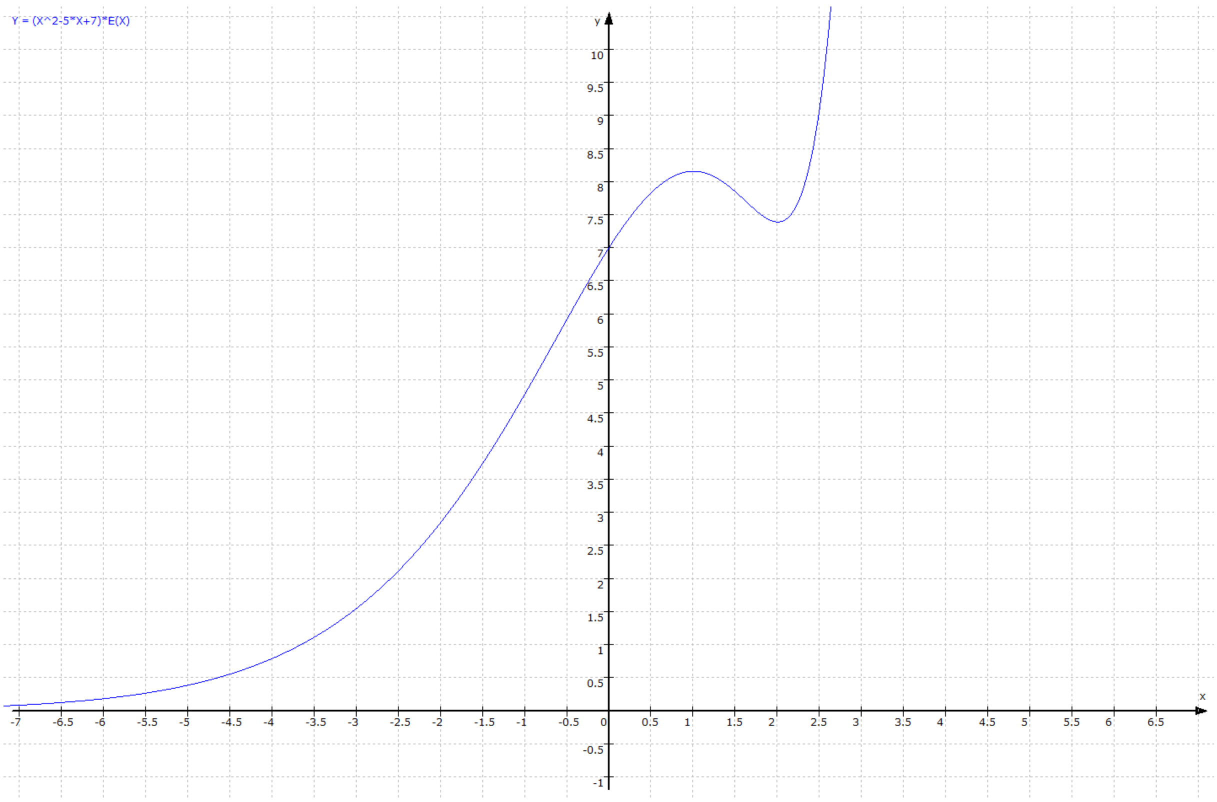
   Bestimme dazu -

   4.1. die ersten drei Ableitungen
   4.2. das Symmetrieverhalten der Funktion (rechnerischer Beweis)
   4.3. das Randverhalten der Funktion
   4.4. die Nullstellen
   4.5. den Achsenabschnitt
   4.6. die Extrema (notwendiges und hinreichendes Kriterium)
   4.7. die Wendepunkte (notwendiges und hinreichendes Kriterium)

5. Flächenbestimmungen

   5.1. Bestimme die Flächen der Funktion in den Intervallen $[0; 2]$; $[-u; 0]$

   Weise nach , dass $F(x) = (x^2 - 7x + 14) \cdot e^x$ eine Stammfunktion ist.



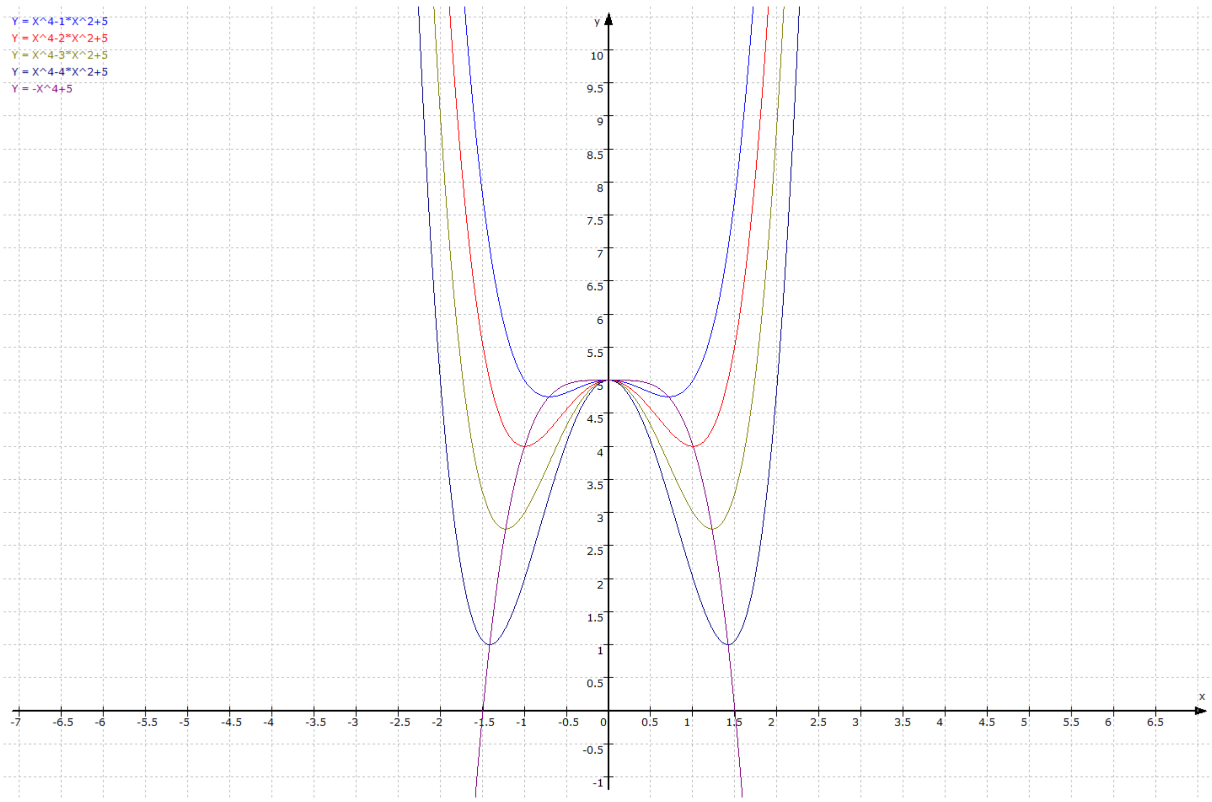
6. Scharenfunktion

Gegeben ist die Funktion $f_{k(x)} = x^4 - kx^2 + 5$

Bestimme dazu –

6.1. die möglichen Nullstellen
6.2. die möglichen Extremalstellen
6.3. die möglichen Wendestellen
6.4. die Funktion der Ortslinie der Extrema

$$f_{k(x)} = x^4 - kx^2 + 5$$



Vor dem Theater soll zur Plakatierung von Progarmmhinweisen eine Reklamesäule mit einer Höhe von 3,5 m gebaut werden. Das Grundgerüst ist eine Stahlkonstruktion, die durch folgende Eckpunkte dargestellt ist. Dabei entspricht eine Längeneinheit 1m.

$$A(4;0;0) \quad B(4;2{,}5;0) \quad C(0;2{,}5;0) \quad D(0;0;0)$$
$$E(4;0;2{,}5) \quad F(4;2{,}5;2{,}5) \quad G(0;2{,}5;3{,}5) \quad H(0;0;3{,}5)$$

Die Punkte $A, B, C\ und\ D$ begrenzen die Grundfläche. Die Säule soll direkt an die Wand des Theaters, die durch die $x_1\ x_3$-Ebene beschrieben wird, angebaut werden.

1.1.Zeichne die Reklamesäule in ein Koordinatensystem.

1.2.Stelle eine Parametergleichung der Ebene E_1 auf, in der die Punkte $H, E\ und\ G$ liegen.

1.3.Weise nach, dass alle Eckpunkte der Dachfläche in der Ebene liegen.

1.4.Zeige, dass das Dach der Säule die Form eines Rechtecks hat, aber kein Quadrat ist.

1.5.Berechne die Maßzahl der Dachfläche.

1.6.An der Wand des Theaters ist in 5 m Höhe eine Lampe so befestigt, dass ihre Position im Punkt $L(0;0;5)$ angenommen werden kann. Die Lampe strahlt rundum. Bestimme die Punkte $S_1,\ S_2\ und\ S_3$, die als Schattenpunkte der Punkte $E, F\ und\ G$ in der x_1, x_2 -Ebene auftreten.

1.7.Zeichne die Schattenpunkte in das in Aufgabe 1.1. erstellte Koordinatensystem.

1.8.Berechne die Fläche des Schattens, den die Reklamesäule in der x_1, x_2-Eben wirft.

1.9.Zum Ausrichten der Säulenkonstruktion beim Aufstellen in schräg liegendem Gelände ist die Säule an den Eckpunkten $A, B, C\ und\ D$ der Grundfläche mit Füßen versehen, die senkrecht herausgedreht werden können.
Berechne die Länge, die man im Punkt A herausdrehen muss, damit die Säule waagerecht steht. Das Theatergelände, auf dem die Säule aufgestellt werden soll, ist durch die Ebenengleichung $E_3: x_1 + 2{,}5x_2 + 50x_3 = 0$ gegeben.

Ein Heissluftballon bewegt sich in einem Gebiet, das durch ein dreidimensionales Koordinatensystem dargestellt werden kann. Die folgenden Werte sind in km angegeben. Der Ballon fährt über eine Landschaftsebene, in der die drei Orte $A, C\ und\ D$ mit den folgenden Koordinaten liegen.

$$A(1;2;0{,}7) \quad C(2;9;0{,}5) \quad D(5;1;0{,}4)$$

Der Ballon befindet sich an der Stelle $B(4;5;1)$

1.1.Der Ballonfahrer kann die Orte $A\ und\ C$ gleichzeitig sehen. Berechne vektoriell den Winkel $\propto$ zwischen den Blickrichtungen vom Ballon zu den Orten mit den Koordinaten $A\ und\ C$.

1.2.Bestimme die Landschaftseben in der Koordinatenschreibweise.

1.3.Ein Beobachter am Ort mit der Koordinate D sieht den Ballon am Punkt B. Berechne den Winkel β zwischen der so gegebenen Blickrichtung und der Landschaftsebene.

1.4.Berechne, in welcher Höhe der Ballon über die Landschaftseben fährt. Verwende dazu den Punkt, der in x_3-Richtung unterhalb des Ballons in der Landschaftsebene liegt.

1.5.Ein Flugzeug nähert sich der Position des Ballons. Seite Flugbahn läßt sich durch die Geradengleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0{,}45 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0{,}21 \end{pmatrix} \lambda \in R$ beschreiben.
Berechne den kürzesten Abstand zwischen dem Ballon und der Flugrichtung des Flugzeugs.

1.6.Fertige zu allen Fragestellungen eine Skizze an.